Coleção UAB–UFSCar

Sistemas de Informação

Alexandre Luis Magalhães Levada

Fundamentos de lógica matemática

Fundamentos de lógica matemática

Reitor
Targino de Araújo Filho
Vice-Reitor
Pedro Manoel Galetti Junior
Pró-Reitora de Graduação
Emília Freitas de Lima

Secretária de Educação a Distância - SEaD
Aline Maria de Medeiros Rodrigues Reali
Coordenação UAB-UFSCar
Claudia Raimundo Reyes
Daniel Mill
Denise Abreu-e-Lima
Joice Otsuka
Sandra Abib
Valéria Sperduti Lima

Coordenadora do Curso de Sistemas de Informação
Vânia Neris

UAB-UFSCar
Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, km 235
13565-905 - São Carlos, SP, Brasil
Telefax (16) 3351-8420
www.uab.ufscar.br
uab@ufscar.br

Alexandre Luis Magalhães Levada

Fundamentos de lógica matemática

São Carlos
2011

Concepção Pedagógica
Daniel Mill

Supervisão
Douglas Henrique Perez Pino

Equipe de Revisão Linguística
Ana Luiza Menezes Baldin
Clarissa Neves Conti
Francimeire Leme Coelho
Jorge Ialanji Filholini
Letícia Moreira Clares
Luciana Rugoni Sousa
Paula Sayuri Yanagiwara
Sara Naime Vidal Vital

Equipe de Editoração Eletrônica
Christhiano Henrique Menezes de Ávila Peres
Izis Cavalcanti
Rodrigo Rosalis da Silva

Equipe de Ilustração
Jorge Luís Alves de Oliveira
Lígia Borba Cerqueira de Oliveira
Priscila Martins de Alexandre

Capa e Projeto Gráfico
Luís Gustavo Sousa Sguissardi

Sumário

APRESENTAÇÃO

A lógica constitui um poderoso ferramental para a formalização do estudo de formas de raciocício. Através desse formalismo matemático podemos eliminar as ambiguidades existentes em linguagens naturais, o que nos permite a definição do cálculo proposicional, ou seja, de um conjunto estrito de regras que nos permitem realizar inferências e deduções válidas acerca de um conjunto inicial de premissas. Em outras palavras, a lógica proposicional é a ciência que estuda princípios de inferência, tendo como objetivo principal determinar em que condições certos fatos são consequência, ou não, de outros. No contexto de sistemas de informação, a motivação principal para o estudo da lógica é sua estreita conexão com aspectos fundamentais da ciência da computação presentes em áreas como a matemática discreta, a lógica digital e a inteligência artificial.

Este livro está organizado em 8 unidades temáticas. A unidade 1 trata dos conceitos básicos envolvidos na lógica proposicional, como a definição de seu alfabeto e seus operadores. Na unidade 2 são apresentados os conceitos de tabela-verdade, tautologia, contradição e contingência. Dois conceitos fundamentais da lógica proposicional, consequência e equivalência lógicas são discutidos em detalhes na unidade 3. A unidade 4 trata da álgebra proposicional, um conjunto de operações e equivalências matemáticas para a manipulação de expressões lógicas, discutindo o conceito de formas normais. Na unidade 5 são discutidos argumentos válidos e regras de inferência lógica, dois aspectos fundamentais para a dedução de conclusões lógicas a partir de um conjunto de premissas. Técnicas dedutivas são o objeto de estudo da unidade 6, que apresenta basicamente três métodos para a verificação da validade de argumentos: a prova direta, a prova condicional e a prova por redução ao absurdo. A unidade 7 discute uma outra importante técnica para a verificação da validade de argumentos: a prova por resolução, que é a base para a automatização da prova de teoremas. Por fim, a unidade 8 apresenta os conceitos básicos da lógica de predicados, caracterizando-a como uma extensão da lógica proposicional.

UNIDADE 1

Lógica proposicional: introdução, conceitos básicos e operadores lógicos

1.1 Primeiras palavras

O desenvolvimento da lógica teve início em torno de 350 a.C. com Aristóteles, e a partir de então evoluiu ao longo de séculos de existência, graças aos esforços de matemáticos como Leibniz, Euler, De Morgan, Boole, Russell, dentre inúmeros outros. Porém, foi apenas no século XX, com o surgimento dos circuitos digitais, que as primeiras aplicações práticas começaram a aparecer.

Entretanto, convém ressaltar que paradoxos e argumentos falaciosos, ou seja, argumentos que, de premissas aparentemente verdadeiras e por passos aparentemente válidos, levam a conclusões aparentemente falsas, já eram conhecidos na Grécia Antiga. Mais precisamente, um paradoxo é uma sentença aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica (veremos a definição formal do que é uma contradição lógica nas próximas unidades do livro).

Em termos simples, um paradoxo é uma figura de pensamento que consiste na exposição contraditória de ideias, fato observado em situações nas quais duas coisas opostas (contraditórias) parecem verdadeiras ao mesmo tempo. Existem diversos tipos de paradoxos: lógicos, matemáticos, filosóficos, psicológicos, físicos, falsídicos, condicionais, dentre outros. Ao mesmo tempo que paradoxos parecem apenas simples brincadeiras, convém ressaltar que muitos deles tiveram um papel importante. Ao longo dos tempos, a identificação e o estudo de paradoxos tem auxiliado de forma significativa o progresso da ciência.

Ao final do século XIX e início do século XX, com avanços na lógica e na matemática, os paradoxos passaram a ser divididos em duas classes principais: sintáticos (ou lógicos) e semânticos. Em poucas palavras, um paradoxo é chamado sintático se pode ser descrito utilizando a linguagem formal da lógica de primeira ordem (da qual a lógica proposicional é um subconjunto, conforme veremos ao final do curso). Já os paradoxos semânticos não podem ser descritos utilizando uma linguagem formal.

Outro aspecto que deve ser mencionado é a existência de uma infinidade de tipos de lógica, dentre as quais podemos citar a clássica, modal, paraconsistente, multivalorada, intucionista, *fuzzy* etc. O estudo que nos interessa mais diretamente é a lógica proposicional como fundamentação básica para a lógica de predicados. A importância do cálculo proposicional para a computação é o fato de este servir de base para a solução de diversos problemas do mundo real, particularmente daqueles que podem ser modelados por sistemas dicotômicos, ou seja, situações em que as variáveis envolvidas apresentam apenas dois estados bem definidos (e em geral, opostos) como 0 ou 1, verdadeiro ou falso, sim ou não, preto ou branco, entre outras. Em uma linguagem menos formal, essa área da ciência é também conhecida como lógica matemática, sendo referenciada assim por diversos autores. Em nosso contexto, por lógica matemática queremos dizer um conjunto de três aspectos principais: introdução e aspectos básicos da lógica proposicional, álgebra e cálculo proposicional e uma breve introdução à lógica de predicados. Em resumo, tudo o que estudaremos aqui constitui a base teórica para a construção e programação de computadores.

1.2 Problematizando o tema

O primeiro estágio no estudo da lógica matemática consiste na apresentação dos conceitos fundamentais desta teoria, necessários para a definição de toda base de conhecimento que será construída ao longo do curso. Iniciaremos pelos aspectos básicos da lógica proposicional.

Nesta unidade veremos, por exemplo, que essa lógica possui um alfabeto próprio, composto por diversas classes de símbolos. Serão apresentados também os conceitos de proposição, valores e operadores lógicos, bem como as tabelas-verdade, essenciais para a resolução de diversos problemas que discutiremos futuramente.

Por fim, outro assunto importante que abordaremos é a formação de sentenças válidas dentro da lógica proposicional, a partir da definição do conceito de fórmula bem-formada. Em resumo, o objetivo desta unidade é fornecer subsídios para que o leitor possa identificar o que é uma proposição válida, construir fórmulas bem-formadas e proposições lógicas válidas, escrever sentenças em linguagem natural utilizando a linguagem da lógica proposicional, bem como determinar seus valores lógicos a partir da definição dos valores de seus átomos.

1.3 O alfabeto da lógica proposicional

A lógica proposicional é uma linguagem formal. Como toda linguagem, ela tem um alfabeto composto por diversos símbolos. Primeiramente, definiremos seu alfabeto, que é composto por um conjunto de símbolos e operadores lógicos. Em seguida, estudaremos o significado de cada um desses operadores ou conectivos e, por fim, definiremos regras gramaticais utilizadas na construção das sentenças dessa linguagem, que são as proposições compostas (fórmulas bem-formadas).

O alfabeto da lógica proposicional é definido pelo conjunto de símbolos descritos a seguir.

- símbolos de pontuação: (e)
- símbolos de verdade: V e F
- símbolos proposicionais atômicos (representados por letras minúsculas): p, q, r, s etc.
- conectivos ou operadores lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

No restante desta unidade veremos com mais detalhes cada um dos componentes desse alfabeto.

1.4 Proposições

Uma *proposição* é definida como um conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. Em outras palavras, podemos dizer que proposições afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos de determinadas entidades (ALENCAR FILHO, 2002). Alguns exemplos de proposições são:

- $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- $\sqrt{3} < \pi$
- o Brasil situa-se na América do Sul

Dizemos que uma proposição tem *valor lógico verdade* (V) se ela é verdadeira; analogamente, ela tem *valor lógico falsidade* (F) se ela é falsa. Considere as seguintes proposições:

1. p: a Argentina fica na África
2. q: o Brasil situa-se no hemisfério Sul

O valor lógico da primeira proposição é F, enquanto o da segunda proposição é V, ou seja, $V(p) = F$ e $V(q) = V$. Proposições podem ser classificadas como *simples* ou *compostas*. Uma proposição é dita *simples* (ou atômica) se não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Proposições simples são geralmente representadas por letras minúsculas. Alguns exemplos de proposições simples são:

- p: Carlos é careca
- q: Paula é estudante
- r: o número 36 é um quadrado perfeito

Uma proposição é dita *composta* (fórmula proposicional) se é formada por duas ou mais proposições. Representaremos proposições compostas por letras maiúsculas. A seguir, temos alguns exemplos de proposições compostas:

- P: Carlos é careca e Paula é estudante
- Q: Rafael dirige carros ou motos
- R: se um jogador de futebol recebe 2 cartões amarelos em um jogo, então deve ser expulso

1.5 Princípios fundamentais da lógica matemática

A lógica matemática adota como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes princípios ou axiomas (ALENCAR FILHO, 2002):

- **Princípio da não contradição:** uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
- **Princípio do terceiro excluído:** toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um desses dois casos, mas nunca um terceiro.

De acordo com esses princípios, podemos afirmar que toda proposição admite um e somente um dos valores V ou F.

1.6 Tabela-verdade

De acordo com o princípio do terceiro excluído, visto anteriormente, toda proposição simples p é verdadeira (V) ou falsa (F). Quando lidamos com uma proposição composta, podemos determinar seu valor lógico a partir dos valores lógicos de cada uma das proposições simples que a compõe, através do princípio fornecido pela definição a seguir (ALENCAR FILHO, 2002).

Definição 1.1: o valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Em outras palavras, para determinar o valor verdade de uma proposição composta devemos primeiramente enumerar todas as possíveis atribuições de valores lógicos a cada uma das variáveis que a compõe. Tal determinação pode ser realizada através de dispositivos denominados tabelas-verdade. Por exemplo, no caso de uma proposição composta cujas variáveis envolvidas (átomos) são p e q, as únicas possíveis atribuições de valores lógicos a p e q são: VV, VF, FV e FF, conforme indica a tabela a seguir.

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

No caso de uma proposição composta cujos átomos componentes são p, q e r, as únicas possíveis atribuições de valores lógicos a p, q e r são dadas pela seguinte tabela-verdade:

	p	q	r
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

Note, a partir da tabela anterior, que os padrões de alternância dos valores lógicos V e F se apresentam de maneira distinta para cada proposição: eles mudam de *quatro em quatro* para a primeira proposição p, de *dois em dois* para a segunda proposição q e de *um em um* para a terceira proposição r. Observe ainda que, além disso, cada linha da tabela-verdade é um arranjo ternário. Na verdade pouco importa a ordem em que esses arranjos estão dispostos nas linhas da tabela-verdade, o importante é que, nesse caso, todos os possíveis arranjos ternários estejam presentes. Essa observação é formalizada pelo seguinte resultado, que apresentaremos sem demonstração (DAGHLIAN, 2009).

Teorema: o número de linhas de uma tabela-verdade referente a uma proposição p é dado por 2^n, no qual n é o número de átomos que compõem p.

1.7 Operações lógicas sobre proposições

Ao raciocinarmos, sem perceber, efetuamos diversas operações lógicas sobre proposições. Elas obedecem a regras de um cálculo, denominado cálculo proposicional, semelhante ao da aritmética sobre os números. O foco desta seção é justamente o estudo das operações lógicas fundamentais.

1.7.1 Negação

Chamamos de *negação de uma proposição* p a proposição denotada por "não p", que resulta em valor lógico V quando p é falsa e F quando p é verdadeira, de modo que "não p" tem o valor lógico oposto daquele de p. A negação de p é denotada por $\neg p$ (ou alternativamente $\sim p$), sendo lida como: "não p". O valor lógico da operação de negação de uma proposição p é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Note que $\neg$ é um operador unário pois atua sobre uma única proposição simples.

Exemplos:

- p : a Terra é um planeta do sistema solar

  $\neg p$: a Terra não é um planeta do sistema solar

  $V(p) = \neg(V(\neg p))$, ou seja, $V = \neg F$

- $q : 1 + 1 = 2$

  $\neg q : 1 + 1 \neq 2$

  $V(q) = \neg(V(\neg q))$, ou seja, $V = \neg F$

1.7.2 Conjunção

Chamamos de *conjunção de duas proposições* p e q a proposição resultante da operação $p \wedge q$, cujo valor lógico é V quando ambas as proposições são verdadeiras e F em todos os outros casos. A expressão $p \wedge q$ é lida como "p *e* q". A tabela-verdade para o operador binário conjunção (note que $\wedge$ atua sobre dois argumentos) é dada por:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplos:

- r : Pelé nasceu na China

  s : Pelé foi um jogador de futebol

  $r \wedge s$: Pelé nasceu na China e foi um jogador de futebol

  $V(r \wedge s) = V(r) \wedge V(s) = F \wedge V = F$

- r : o Brasil venceu a Copa do Mundo de 2002

  s : o Brasil venceu a Copa do Mundo de 2010

  $r \wedge s$: o Brasil venceu as Copas do Mundo de 2002 e 2010

  $V(r \wedge s) = V(r) \wedge V(s) = V \wedge F = F$

- p : São Paulo é um estado do Brasil

  q : o Brasil é um país que pertence ao continente americano

  $p \wedge q$: São Paulo é um estado do Brasil, um país que pertence ao continente americano

  $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$

1.7.3 Disjunção

Chamamos de *disjunção de duas proposições* p e q a proposição resultante da operação $p \vee q$, cujo valor lógico é V quando uma das proposições é verdadeira e F apenas quando ambas são falsas. A expressão $p \vee q$ é lida como "p *ou* q". A tabela-verdade para o operador binário disjunção (note que $\vee$ atua sobre dois argumentos) é dada por:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos:

- p : Lula foi presidente do Brasil

  q : Lula nasceu na Rússia

  $p \vee q$: Lula foi presidente do Brasil ou nasceu na Rússia

  $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = V$

- r : Albert Einstein foi um bombeiro

  s : Albert Einstein nasceu no Brasil

  $r \vee s$: Albert Einstein foi bombeiro ou nasceu no Brasil

  $V(r \vee s) = V(r) \vee V(s) = F \vee F = F$

- r : um carro *flex* é movido a etanol

  s : um carro *flex* é movido à gasolina

  $r \vee s$: um carro *flex* é movido a etanol ou à gasolina

  $V(r \vee s) = V(r) \vee V(s) = V \vee V = V$

1.7.4 Disjunção exclusiva

Chamamos de *disjunção exclusiva de duas proposições* p e q a proposição resultante da operação $p \veebar q$, cujo valor lógico é V somente quando $V(p) \neq V(q)$ e F quando $V(p) = V(q)$, ou seja, quando são ambas falsas ou ambas verdadeiras. A expressão $p \veebar q$ é lida como "p *ou* q, *mas não ambas*", "p *ou exclusivo* q", ou ainda "*ou* p, *ou* q". A tabela-verdade para o operador binário disjunção exclusiva é dada por:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Em algumas proposições compostas, somente uma de suas componentes pode ser verdadeira, pois são mutuamente exclusivas. Por exemplo, se alguém nasce em um estado, não pode ter nascido em outro.

Exemplos:

- p : Antônio é paulista (V)

  q : Antônio é mineiro

  $p \veebar q$: ou Antônio é paulista ou é mineiro

  $V(p \veebar q) = V(p) \veebar V(q) = V \veebar F = V$

- r : o Rio de Janeiro fica na região Sudeste

  s : Pernambuco fica na região Nordeste

  $r \veebar s$: ou o Rio de Janeiro fica no Sudeste ou Pernambuco fica no Nordeste

  $V(r \veebar s) = V(r) \veebar V(s) = V \veebar V = F$

1.7.5 Condicional

Chamamos de *condicional* toda proposição que é definida da forma "*se* p, *então* q", representada por $p \rightarrow q$, e cujo valor lógico é F somente quando p é verdadeira e q é falsa. A expressão $p \rightarrow q$ é lida como "p *implica* q" ou simplesmente "*se* p, *então* q", de modo que seu resultado é F somente quando uma proposição verdadeira implica em falsidade. O oposto, ou seja, uma proposição falsa implicando em verdade, resulta em V, o que significa que $p \rightarrow q$ é sempre V quando p é falso. Em outras palavras, essa definição nos diz que de uma declaração falsa podemos concluir qualquer coisa, que o resultado será logicamente verdadeiro. Em uma condicional, as proposições p e q são denominadas de antecedente e consequente, respectivamente. A tabela-verdade para o operador binário *implicação* é dada por:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplos:

- p : Carlos mora em Fortaleza

  q : Carlos mora no Ceará

  $p \rightarrow q$: se Carlos mora em Fortaleza, então ele mora no Ceará

  $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V$

- r : Minas Gerais está localizado na região Sudeste do Brasil

  s : Alagoas está localizado na região Sul do Brasil

  $r \rightarrow s$: se Minas Gerais está localizado na região Sudeste, então Alagoas localiza-se na região Sul

  $V(r \rightarrow s) = V(r) \rightarrow V(s) = V \rightarrow F = F$

- w : Alagoas está localizado na região Sul do Brasil

  u : Minas Gerais está localizado na região Norte do Brasil

  $w \rightarrow u$: se Alagoas está localizado na região Sul do Brasil, então Minas Gerais localiza-se na região Norte

  $V(w \rightarrow u) = V(w) \rightarrow V(u) = F \rightarrow F = V$

Note que, se o consequente é verdadeiro, pouco importa o valor lógico do antecedente, pois a condicional será sempre verdadeira. Vale ressaltar também que $p \rightarrow q$ não nos diz que q é uma consequência de p, ou seja, não podemos afirmar que é possível deduzir q a partir de p.

1.7.6 Bicondicional

Chamamos de *bicondicional* toda proposição que é definida da forma "p, *se e somente se* q", representada por $p \leftrightarrow q$, e cujo valor lógico é V quando $V(p) = V(q)$ e F quando $V(p) \neq V(q)$. Em outras palavras, o operador bicondicional nada mais é que a dupla aplicação do operador condicional, ou seja, o resultado de uma bicondicional é V apenas quando $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são ambas verdadeiras. A tabela-verdade para o operador binário bicondicional é dada por:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplos:

- p : um triângulo tem 3 lados

  q : um quadrado tem 4 lados

  $p \leftrightarrow q$: um triângulo tem 3 lados se e somente se um quadrado tem 4 lados

  $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$

- r : Carolina é paulista (V)

  s : Carolina nasceu no Rio de Janeiro

  $r \leftrightarrow s$: Carolina é paulista se e somente se nasceu no Rio de Janeiro

  $V(r \leftrightarrow s) = V(r) \leftrightarrow V(s) = V \leftrightarrow F = F$

- w : uma hora tem 10 minutos

u : um dia tem 40 horas

$w \leftrightarrow u$: uma hora tem 10 minutos se e somente se um dia tem 40 horas

$V(w \leftrightarrow u) = V(w) \leftrightarrow V(u) = F \leftrightarrow F = V$

Da mesma forma que a condicional, não podemos dizer que p é consequência de q ou vice-versa. Trata-se apenas de um conectivo lógico.

1.8 Precedência dos operadores lógicos

Uma questão importante ao analisarmos uma proposição composta é a determinação de qual operação deve ser realizada primeiro. Uma maneira eficiente de explicitar isso é através da utilização de parêntesis para agrupar operações lógicas. Porém, às vezes a utilização de muitos parêntesis pode dificultar a leitura de uma determinada proposição. Dessa forma, é interessante definirmos a precedência dos operadores lógicos. A tabela a seguir mostra a precedência dos conectivos lógicos estudados até o momento. Quanto maior o valor associado ao operador, maior a sua prioridade. A definição de precedência é fundamental para uma avaliação correta de qualquer expressão lógica. Por essa razão, para evitar possíveis interpretações errôneas, recomenda-se fortemente que seja adotado um esquema de parentização adequado com o intuito de evidenciar a precedência das operações.

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
4	3	2	1	0

Assim, a proposição $p \wedge q \vee r$ deve ser entendida como $(p \wedge q) \vee r$. Analogamente, $p \rightarrow q \vee r$ deve ser entendida como $p \rightarrow (q \vee r)$. Como o operador $\leftrightarrow$ tem precedencia menor, a proposição $p \leftrightarrow p \rightarrow q$ deve ser entendida como $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$. Porém, em alguns casos as regras de precedência dos operadores não são suficientes para remover todas as ambiguidades. É o caso da proposição $p \rightarrow q \rightarrow r$, que pode ser entendida tanto como $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ quanto

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$, dependendo da parentização adotada (Nicoletti, 2009).

1.9 Fórmulas bem-formadas

Dizemos que uma proposição composta por outras proposições é uma fórmula bem-formada, ou *WFF* (*Well-Formed Formula*) se ela define uma sentença lógica válida (é uma sentença válida dentro da gramática da lógica proposicional). Uma *WFF* é definida recursivamente como (NICOLETTI, 2009):

- os símbolos V e F são *WFFs*
- um átomo é uma *WFF*
- se p é uma *WFF*, $\neg p$ também é uma *WFF*
- se p e q são duas *WFFs*, $p * q$, onde $*$ representa qualquer um dos operadores binários vistos anteriormente, também é uma *WFF*

Como exemplos de fórmulas bem-formadas, podemos citar as expressões $p \rightarrow (q \wedge r)$, $\neg q \wedge ((\neg r \wedge s) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q))$ e $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg p$.

1.9.1 Cláusulas

Um tipo de fórmula bem-formada de particular interesse são as cláusulas, muito utilizadas no estudo de formas normais e na programação de computadores em linguagem Prolog. Uma cláusula nada mais é que uma disjunção de proposições atômicas (ou sua negação), ou seja, é uma expressão da forma:

$$C = L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n \quad (1.1)$$

onde L_i, $i = 1, \ldots, n$ é um átomo qualquer (i.e., α) ou sua negação (i.e., $\neg\alpha$). Por exemplo, as expressões $(p \vee \neg q \vee r)$ e $(\neg r \vee q)$ são cláusulas.

1.10 Conclusões

A presente unidade apresentou os fundamentos básicos da lógica proposicional. Foram apresentados os conceitos de proposição, valores lógicos, operadores lógicos e tabelas-verdade. Na próxima unidade veremos como construir tabelas-verdade para proposições compostas com um número arbitrário de átomos, o que é extremamente importante no estudo não somente da lógica proposicional, como também da lógica digital, em especial no projeto de circuitos digitais.

1.11 Estudos complementares

Como forma de complementar o que vimos nesta unidade, esta seção propõe alguns tópicos relacionados ao estudo dos paradoxos. Conforme mencionado na introdução desta unidade, alguns deles foram (e ainda são) muito importantes para o avanço de diversas áreas da ciência. São listados a seguir alguns dos mais conhecidos paradoxos existentes como sugestão de tópicos a serem pesquisados na Internet.

- O paradoxo de Olbers
- O paradoxo de Fermi
- O paradoxo de Russell
- O paradoxo de Zenão
- O paradoxo do hotel de Hilbert
- O paradoxo do barbeiro
- O paradoxo de Monty Hall
- O paradoxo do quadrado perdido
- O paradoxo do enforcamento inesperado (ou da prova surpresa)
- O paradoxo do gato de Schrödinger

- O paradoxo da rede rodoviária (paradoxo de Braess)
- O paradoxo de São Petesburgo
- O paradoxo de Abilene
- O dilema do prisioneiro

Outros links interessantes sobre o tema:

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Paradoxo>.

<http://www.unesp.br/~jroberto/paradox.htm>.

1.12 Exercícios

A seguir encontra-se uma série de exercícios sobre o tópico abordado nesta unidade. Tais exercícios foram extraídos de Nicoletti (2009), Daghlian (2009) e Alencar Filho (2002).

1) As sentenças a seguir estão escritas em linguagem natural. Escreva cada uma delas usando a linguagem da Lógica Proposicional (LP), definindo cada proposição utilizada.

Exemplo: Se chove, então as ruas ficam molhadas.

p: chove q: as ruas ficam molhadas Em LP: $p \rightarrow q$

a) Jõao é magro ou Maria não é brasileira.

b) Se Maria estuda bastante, então ela vai ao cinema.

c) Antônio vai ao cinema se e somente se o filme for uma comédia.

d) Ou Maria irá ao cinema e João não, ou Maria não irá e João irá.

e) Duas crianças tem o mesmo tio se e somente se elas têm a mesma mãe e o mesmo pai.

f) Se $i > j$, então $(i - 1) \geq j$ senão $j = 3$.

2) Sejam as proposições p: está frio e q: está chovendo. Escrever em linguagem natural as seguintes proposições:

a) $\neg p$

b) $p \wedge q$

c) $p \vee q$

d) $q \leftrightarrow p$

e) $p \rightarrow \neg q$

f) $p \vee \neg q$

g) $\neg p \wedge \neg q$

h) $p \leftrightarrow \neg q$

i) $(p \wedge \neg q) \rightarrow p$

3) Determinar $V(p)$ e $V(q)$ em cada um dos seguintes casos, indicando quando não for possível:

a) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = F$

b) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = F$

c) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = V$

d) $V(p \leftrightarrow q) = F$ e $V(p \wedge q) = V$

4) Para quais valores lógicos de p e q se tem $V(p \wedge q) = V(p \rightarrow q)$?

5) Se $V(p) = V(q) = V$ e $V(r) = V(s) = F$, determine os valores lógicos das seguintes proposições:

a) $\neg p \vee r$

b) $r \wedge (p \rightarrow s)$

c) $\neg p \vee \neg(r \wedge s)$

d) $\neg(q \leftrightarrow (\neg p \wedge s))$

e) $(p \leftrightarrow q) \vee (q \rightarrow \neg p)$

f) $(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow s)$

g) $\neg\neg(\neg q \wedge (p \wedge \neg s))$

h) $\neg q \wedge ((\neg r \wedge s) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q))$

i) $\neg(p \to (q \to r)) \to s$

6) Determine os valores lógicos das proposições a seguir, justificando os casos nos quais os dados forem insuficientes:

a) $\neg p \to (q \vee \neg r)$, dado que $V(r) = F$

b) $(p \leftrightarrow q) \vee (q \to \neg p)$, sabendo que $V(q) = V$

c) $p \wedge (\neg q \to (r \wedge s))$, sabendo que $V(p) = F$

d) $(\neg p \vee r) \to (q \to s)$, sabendo que $V(q) = F$

e) $(p \to r) \wedge s$, sabendo que $V(r) = V$

f) $p \to (r \vee s)$, sabendo que $V(r) = V$

g) $(p \wedge q) \leftrightarrow r$, sabendo que $V(q) = V$

h) $((p \to q) \wedge p) \to \neg p$, sabendo que $V(p) = F$

i) $p \to (\neg q \wedge r)$, sabendo que $V(q) = F$ e $V(r) = V$

1.13 Referências

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

1.14 Referências consultadas

D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. Texto produzido para o minicurso *História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas* realizado no V Seminário Nacional de História da Matemática na UNESP de Rio Claro de 13 a 16 de abril de 2003.

GUIMARÃES, J. O. *Introdução à Lógica Matemática*. Disponível em: <http://www2.dc.ufscar.br/~jose/courses/09-1/LC/Logica para Computacao.pdf>. Acesso em: 15 out. 2011.

UNIDADE 2

Tabelas-verdade: interpretação, tautologias e contradições lógicas

2.1 Primeiras palavras

Ao estudarmos proposições compostas, deparamo-nos com fórmulas que envolvem um número arbitrário (finito) de átomos e operadores lógicos. Na unidade anterior vimos como definir tabelas-verdade para o caso de proposições que continham apenas um conectivo lógico, como, por exemplo, as expressões $p \wedge q$ ou $p \rightarrow q$. O objetivo desta unidade é mostrar como podemos construir tabelas-verdade para expressões mais gerais.

2.2 Problematizando o tema

Suponha, por exemplo, que desejamos responder a seguinte pergunta: será que existem proposições lógicas válidas (fórmulas bem-formadas) que são sempre verdadeiras, independentemente dos válores lógicos de seus átomos? Se a resposta for sim, então obviamente, a negação de tais proposições será sempre falsa. Em outras palavras, estamos interessados em investigar se uma proposição pode ser verdadeira mesmo quando todos os seus valores lógicos são escolhidos arbitráriamente. Essas são justamente duas das perguntas que a presente unidade responderá. Ainda, aprenderemos como essas perguntas estão diretamente relacionadas a três conceitos fundamentais da lógica matemática: tautologia, contradição e contingência.

2.3 Construção da tabela-verdade

Para construírmos a tabela-verdade referente a uma proposição composta, devemos proceder de acordo com os seguintes passos:

- Determinar o número de linhas da tabela-verdade resultante. Esse número será igual a 2^n, no qual n é o número total de átomos na expressão.

- Observar a precedência entre os operadores lógicos, pois isso determina a ordem em que devemos construir as colunas da tabela. Deve-se preencher primeiro as colunas dos símbolos atômicos, continuando o processo de forma a respeitar a prioridade das operações lógicas, atentando sempre para agrupamentos construídos usando os parêntesis.

- Aplicar as definições das operações lógicas, conforme visto na Unidade 1, ou seja, efetivamente realizar a operação lógica definida de acordo com o item anterior.

Uma observação relevante é quanto à inicialização da tabela-verdade, ou seja, o preenchimento dos símbolos atômicos. Por exemplo, no caso de existirem 4 átomos distintos na proposição composta, teremos que o total de linhas da tabela-verdade será $2^4 = 16$. Assim, os grupos de valores V e F devem se alternar de 8 em 8 para o primeiro átomo, de 4 em 4 para o segundo, de 2 em 2 para o terceiro e de 1 em 1 para o quarto, de modo a gerar todas as possíveis combinações de V e F para 4 variáveis lógicas. Os exemplos a seguir, extraídos de Alencar Filho (2002) e Daghlian (2009), ilustram o processo de construção da tabela-verdade para a proposição $\neg(p \wedge \neg q)$.

Exemplo 1: construa a tabela-verdade de $P = \neg(p \wedge \neg q)$.

Solução:

O primeiro passo consiste na formação do par de colunas referentes a cada um dos átomos de P, p e q.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

A seguir, devemos preencher a coluna referente à $\neg q$, pois o operador negação é o de maior prioridade, resultando em:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F		
V	F	V		
F	V	F		
F	F	V		

Como existe um parêntesis agrupando átomos, a próxima operação a ser aplicada é $p \wedge \neg q$, pois a seguir, a negação deverá ser aplicada ao resultado dessa operação.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	
V	F	V	V	
F	V	F	F	
F	F	V	F	

Por fim, a última coluna da tabela-verdade a ser preenchida é a proposição composta em si, levando ao resultado final.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Exemplo 2: construa a tabela-verdade para $P = \neg(p \wedge q) \vee \neg(p \leftrightarrow q)$.

Solução:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg(p \wedge q) \vee \neg(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Exemplo 3: construa a tabela-verdade da proposição $P = (p \vee \neg r) \rightarrow (q \wedge \neg r)$.

Solução:

p	q	r	$\neg r$	$p \vee \neg r$	$q \wedge \neg r$	$(p \vee \neg r) \rightarrow (q \wedge \neg r)$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

Exemplo 4: gere a tabela-verdade de $P = (p \rightarrow (\neg q \vee r)) \wedge \neg(q \vee (p \leftrightarrow \neg r))$.

Solução:

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \vee r$	$p \leftrightarrow \neg r$	$q \vee (p \leftrightarrow \neg r)$	$\neg(q \vee (p \leftrightarrow \neg r))$	$p \rightarrow (\neg q \vee r)$	P
V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V

Existem outros métodos para a construção de tabelas-verdade. Para nossos propósitos, a abordagem apresentada aqui é plenamente suficiente, por isso não iremos discutir outras metodologias. Para maiores detalhes sobre esse assunto recomenda-se a leitura de Alencar Filho (2002).

2.4 Tautologias, contradições e contingências

Até então, aprendemos como construir tabelas-verdade para proposições compostas gerais. Neste momento, uma pergunta natural é: será que existem proposições compostas que são sempre verdadeiras (ou falsas), independente dos valores lógicos que seus átomos assumem? O objetivo desta seção é justamente responder esse tipo de questionamento, utilizando tabelas-verdade como mecanismo para identificação de tais situações.

2.4.1 Tautologias

Chamamos de *tautologia* toda proposição composta cuja última coluna da tabela-verdade é inteiramente composta por valores lógicos V. Em outras palavras, é uma proposição cujo valor lógico é sempre verdade, ou seja, ela é sempre verdadeira independentemente dos valores de suas proposições atômicas.

Dois exemplos interessantes de tautologia são os princípios fundamentais da lógica matemática. O *príncipio da não contradição* nos diz que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesno tempo. Para verificar tal fato, basta construirmos a tabela-verdade da proposição composta $P = \neg(p \wedge \neg p)$. Note que P é sempre verdadeira, independente do valor de p.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Da mesma forma, o *princípio do terceiro excluído* também é uma tautologia. Basta verificar a tabela-verdade da proposição $P = p \vee \neg p$.

A seguir, veremos mais alguns exemplos de proposições tautológicas.

Exemplo 5: mostre que a proposição $P = p \vee \neg(p \wedge q)$ é uma tautologia.

Solução:

Construindo a tabela-verdade de P, observamos que P é sempre verdadeira, o que significa que a proposição é uma tautologia.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg(p \wedge q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Exemplo 6: mostre que $P = p \vee (q \wedge \neg q) \leftrightarrow p$ é uma tautologia.

Solução:

Para mostrar que P é uma proposição tautológica, basta construir sua tabela-verdade.

p	q	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$p \vee (q \wedge \neg q)$	$p \vee (q \wedge \neg q) \leftrightarrow p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V

Exemplo 7: mostre que a proposição $P = (p \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee r)$ é uma tautologia.

Solução:

Construindo a tabela-verdade de P, temos que a última coluna é composta apenas de elementos V, mostrando que P é sempre verdadeira.

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge r$	$\neg q \vee r$	$(p \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee r)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

2.4.2 Contradição

O conceito de contradição é dual ao de tautologia. Chamamos de contradição toda proposição composta cuja última coluna da tabela-verdade é inteiramente composta por valores lógicos F. Em outras palavras, é uma proposição que é sempre falsa, independentemente dos valores de suas proposições atômicas. A definição a seguir relaciona os conceitos de tautologia e contradição.

Definição: seja P uma proposição. Então, P é uma tautologia se e somente se $\neg P$ é uma contradição.

O que essa definição nos diz é algo bastante intuitivo. Em outras palavras, a negação de uma tautologia é sempre uma contradição e a negação de uma contradição é sempre uma tautologia. Veremos a seguir uma série de exemplos de contradições.

Exemplo 8: mostre que a proposição $P = (p \wedge \neg p)$ é uma contradição.

Solução:

Construindo a tabela-verdade de P, verificamos que a última coluna é composta apenas de elementos F, mostrando que P é sempre falsa.

p	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$
V	F	F
F	V	F

Esse resultado nos diz que uma proposição jamais pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Exemplo 9: mostre que a proposição $P = (p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ é uma contradição.

Solução:

Construindo a tabela-verdade de P, temos:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Portanto, P é uma contradição.

Exemplo 10: mostre que a proposição $\neg p \wedge (p \wedge \neg q)$ é uma contradição.

Solução: para mostrar que P é uma contradição, basta construir sua tabela-verdade.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge (p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

2.4.3 Contingências

Chamamos de contingência toda proposição composta em que na última coluna da tabela-verdade ocorrem os valores lógicos V e F pelo menos uma vez cada. Resumindo, trata-se de uma proposição que não é nem tautologia, nem contradição, sendo muitas vezes denominadas de proposições indeterminadas. A seguir, veremos diversos exemplos nos quais isso acontece.

Exemplo 11: determine se a proposição $P = (p \vee q) \rightarrow p$ é uma tautologia, contradição ou contingência.

Solução: construindo a tabela-verdade de P, verificamos que a última coluna é composta tanto por elementos V quanto por elementos F, mostrando que P é uma contingência.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

Exemplo 12: determine se a proposição $P = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é uma tautologia, contradição ou contingência.

Solução: construindo a tabela-verdade de P, verificamos:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Portanto, P é uma contingência. Ao fim da unidade são propostos alguns exercícios de fixação sobre o tema abordado. Tais exercícios foram originalmente propostos em Daghlian (2009).

2.5 Conclusões

A presente unidade apresentou de maneira bastante objetiva como podemos construir tabelas-verdade para proposições compostas em geral. Além disso, foram apresentados três conceitos fundamentais relacionados à semântica da lógica proposicional que são as tautologias, as contradições e as contingências. Na próxima unidade estudaremos outros dois conceitos primordiais do cálculo proposicional: consequência e equivalência lógicas.

2.6 Estudos complementares

Para se aprofundar mais no tema tratado nesta unidade, recomendamos as referências Souza (2008) e Nicoletti (2009). Os leitores poderão encontrar diversas definições formais e resultados que foram omitidos neste texto, mas que são fundamentais para um tratamento matemático mais rigoroso.

2.7 Exercícios

1) Construa tabelas-verdades para as seguintes proposições compostas:

a) $\neg(p \wedge q)$	b) $\neg(p \rightarrow \neg q)$
c) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$	d) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow p)$
e) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$	f) $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge q)$
g) $(\neg p \wedge r) \rightarrow (q \vee r)$	h) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \neg r$
i) $p \rightarrow (p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (q \vee r)$	j) $((p \vee q) \rightarrow r) \vee (\neg p \leftrightarrow (q \vee \neg r))$

2) Sabendo que $V(p) = V(r) = V$ e $V(q) = V(s) = F$, determinar o valor lógico de cada uma das proposições:

a) $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \wedge \neg s)$

b) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (s \rightarrow r)$

c) $p \rightarrow \neg q \leftrightarrow (p \vee r) \wedge s$

d) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \rightarrow (p \vee s)$

3) Determine quais das seguintes proposições são tautologias, contradições ou contingências.

a) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

b) $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

c) $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$

d) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow q) \rightarrow p$

e) $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

f) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

g) $p \rightarrow ((p \vee q) \vee r)$

h) $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow (q \vee r))$

i) $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

2.8 Referências

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

2.9 Referências consultadas

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

GUIMARÃES, J. O. *Introdução à Lógica Matemática*. Disponível em: <http://www2.dc.ufscar.br/~jose/courses/09-1/LC/Logica para Computacao.pdf>. Acesso em: 15 out. 2011.

UNIDADE 3

Consequência e equivalência lógicas

3.1 Primeiras palavras

Vimos na unidade anterior como construir tabelas-verdade para proposições compostas em geral. O objetivo desta unidade é mostrar como podemos utilizar essa ferramenta poderosa (tabela-verdade) para resolver dois problemas em particular:

- Determinar se uma proposição é consequência lógica de um dado conjunto de proposições;
- Determinar se duas proposições são equivalentes.

O conceito de consequência lógica está diretamente relacionado com a ideia de prova ou dedução, na qual uma conclusão pode ser obtida a partir de um conjunto de proposições denominadas premissas, ao passo que o conceito de equivalência lógica está diretamente relacionado com a ideia de igualdade de proposições, sendo muito importante na definição de propriedades fundamentais da álgebra proposicional, como, por exemplo, as Leis de De Morgan.

3.2 Problematizando o tema

Em termos práticos, o problema de determinar se uma proposição é consequência lógica de um dado conjunto de proposições consiste em, dado um conjunto de proposições Φ (que pode conter somente uma proposição), em geral denominado de conjunto de premissas, determinar se uma dada proposição P é consequência lógica de tais proposições, ou seja, determinar se a proposição P é verdade sempre que as proposições pertencentes a Φ forem verdadeiras. Já o problema de determinar se duas proposições são equivalentes consiste em determinar se duas ou mais proposições são "idênticas", condição que ocorre quando suas tabelas-verdade são exatamente iguais. Esses dois conceitos são fundamentais dentro do cálculo proposicional, pois são a base para a definição das regras de inferência, que serão discutidas na unidade 5.

3.3 Consequência lógica

Esta seção mostra como podemos determinar se uma proposição P é *consequência lógica* de um conjunto de proposições. Além disso, veremos alguns resultados que nos auxiliam na solução desse problema. Primeiramente, é necessário uma definição para este conceito.

Definição 3.1: dadas as proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dizemos que Q é *consequência lógica* de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se e somente se a seguinte regra sempre for válida: se $P_1, P_2, \ldots, P_n$ forem todas simultaneamente verdadeiras, ou seja, $V(P_1) = V(P_2) = \cdots = V(P_n) = V$, então, Q também é verdade, ou seja, $V(Q) = V$. Se Q é *consequência lógica* de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, utilizaremos a seguinte notação:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models Q \tag{3.1}$$

Vejamos um primeiro exemplo bastante simples que ilustra o conceito.

Exemplo 1: verifique que $p \vee q$ é consequência lógica de p.

Solução:

O primeiro passo consiste na construção das tabelas-verdade das proposições envolvidas, neste caso, p e $(p \vee q)$.

p	q	$p \vee q$	
V	V	V	$\Longleftarrow$
V	F	V	$\Longleftarrow$
F	V	V	
F	F	F	

O próximo passo consiste em observar as colunas de p e $p \vee q$. Note que $p \vee q$ tem valor lógico V sempre que p é verdade, o que significa que podemos escrever $p \models p \vee q$, ou seja, $p \vee q$ é consequência lógica de p. Note, entretanto, que não podemos dizer que p é consequência lógica de $p \vee q$, uma vez que, como indica a terceira linha da tabela acima, existe uma situação em que $p \vee q$ assume valor lógico V e p assume valor lógico F. O exemplo a seguir, de Nicoletti (2009), ilustra o caso no qual desejamos verificar se uma proposição é consequência lógica de um conjunto de proposições dadas.

Exemplo 2: considere as proposições $P = p \to q$, $Q = r \to s$ e $R = (p \vee r) \to (q \vee s)$. Verifique se R é consequência lógica de P, Q.

Solução:

Assim como no caso anterior, iniciaremos com a construção da tabela-verdade.

p	q	r	s	$(p \to q)$	$(r \to s)$	$(p \vee r)$	$(q \vee s)$	$(p \vee r) \to (q \vee s)$	
V	V	V	V	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
V	V	V	F	V	F	V	V	V	
V	V	F	V	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
V	V	F	F	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
V	F	V	V	F	V	V	V	V	
V	F	V	F	F	F	V	F	F	
V	F	F	V	F	V	V	V	V	
V	F	F	F	F	V	V	F	F	
F	V	V	V	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
F	V	V	F	V	F	V	V	V	
F	V	F	V	V	V	F	V	V	$\Leftarrow$
F	V	F	F	V	V	F	V	V	$\Leftarrow$
F	F	V	V	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
F	F	V	F	V	F	V	F	F	
F	F	F	V	V	V	F	V	V	$\Leftarrow$
F	F	F	F	V	V	F	F	V	$\Leftarrow$

Observando a tabela acima podemos perceber a seguinte situação: sempre que P e Q são simultaneamente verdadeiras, isto é, $V(P) = V(Q) = V$ (o que ocorre nas linhas destacadas), R assume apenas valores lógicos V. Em outras palavras, isso significa que R é consequência lógica de P e Q, ou seja, $P, Q \models R$.

O resultado que veremos a seguir fornece uma outra alternativa para verificar se uma proposição é consequência lógica de um dado conjunto de proposições. Ele relaciona os conceitos de tautologia e consequência lógica. Este resultado é enunciado na forma de um teorema, cuja prova será omitida. Maiores detalhes sobre a prova deste teorema encontram-se em Nicoletti (2009).

Teorema 3.1: dadas as proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$, a proposição Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, se e somente se $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q$ for uma tautologia.

Exemplo 3: considere as proposições $P = (p \rightarrow q)$, $Q = (q \rightarrow r)$ e $R = (p \rightarrow r)$. Verifique se $P, Q \models R$.

Solução:

Utilizando o resultado do Teorema 3.1, podemos verificar que $P, Q \models R$ mostrando que $S = (P \wedge Q) \rightarrow R$, ou ainda, $S = ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ é uma tautologia. Para isso, procedemos com a construção da respectiva tabela-verdade.

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r)$	S
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Observando a tabela-verdade acima percebe-se claramente que $S = ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ é uma tautologia. Portanto, isto significa que R é consequência lógica de P e Q, ou seja, $P, Q \models R$. A consequência lógica $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ é uma das regras de inferência que iremos estudar nas próximas unidades, sendo conhecida como regra do *Silogismo Hipotético*, pois ela nos permite concluir $(p \rightarrow r)$ a partir de $(p \rightarrow q)$ e $(q \rightarrow r)$.

Veremos a seguir outro resultado que nos fornece uma outra alternativa para verificar se uma proposição é consequência lógica de um dado conjunto de proposições. Este resultado, que também será enunciado na forma de um teorema, é baseado no fato de que uma tautologia nada mais é que a negação de uma contradição. Estes dois teoremas são muito importantes na lógica proposicional, particularmente em técnicas de provas dedutivas e prova por absurdo.

Teorema 3.2: dadas as proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$, a proposição Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, se e somente se $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge \neg Q)$ for uma contradição.

A seguir, veremos como o exemplo anterior pode ser resolvido utilizando o resultado derivado do Teorema 3.2.

Exemplo 4: ainda supondo $P = (p \rightarrow q)$, $Q = (q \rightarrow r)$ e $R = (p \rightarrow r)$, verifique que $P, Q \models R$, ou seja, que R é consequência lógica de P e Q, utilizando o conceito de contradição.

Solução:

Utilizando o resultado do Teorema 3.2, podemos verificar que $P, Q \models R$ mostrando que $S = P \wedge Q \wedge \neg R$, ou ainda, $S = ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge \neg(p \rightarrow r)$ é uma contradição. Para isso, procedemos com a construção da respectiva tabela-verdade.

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r)$	$\neg(p \rightarrow r)$	S
V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F

Observando a tabela-verdade, fica provado que $S = P \wedge Q \wedge \neg R$ é uma contradição, o que automaticamente mostra que $P, Q \models R$, ou seja, que R é consequência lógica de P e Q.

3.4 Equivalência lógica

Esta seção tem como objetivo apresentar resultados que nos permitam verificar quando duas ou mais proposições são logicamente equivalentes.

Definição 3.2: dizemos que uma proposição P é *logicamente equivalente* a uma proposição Q, o que é representado como $P \equiv Q$, se e somente se P for consequência lógica de Q e Q for consequência lógica de P, ou seja, se e somente se $P \models Q$ e $Q \models P$.

Assim, todos os resultados que foram apresentados na seção anterior podem ser utilizados aqui. Dessa forma, considerando o Teorema 3.1, $P \models Q$ se e somente se $P \rightarrow Q$ for uma tautologia, e $Q \models P$ se e somente se $Q \rightarrow P$ for uma tautologia. Portanto, duas proposições P e Q são equivalentes, isto é, $P \equiv Q$, se e somente se $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia. Isso equivale a dizer que duas proposições são logicamente equivalentes se e somente se suas tabelas-verdade forem idênticas. Vejamos alguns exemplos a seguir.

Exemplo 5: mostre que $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Solução:

Para verificar que $(p \to q)$ é logicamente equivalente à $(\neg p \vee q)$, basta verificar que a proposição $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia, o que em essência é o mesmo que verificar se as tabelas-verdade de $(p \to q)$ e $(\neg p \vee q)$ são iguais.

p	q	$\neg p$	$(p \to q)$	$(\neg p \vee q)$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

A partir da tabela-verdade a equivalência lógica fica evidenciada, uma vez que a proposição composta $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia. Essa equivalência significa que temos uma identidade, ou seja, em qualquer método de dedução, prova ou inferência podemos substituir uma fórmula pela outra, da mesma forma que na matemática podemos substituir a tangente de um ângulo pela razão entre o seno e o cosseno daquele ângulo. Isso nos permite intercambiar de $(p \to q)$ para $(\neg p \vee q)$ sempre que precisarmos. Essa é a importância de encontrar equivalências lógicas.

Exemplo 6: sendo $P = (p \vee q) \to r$ e $Q = (p \to r) \wedge (q \to r)$, mostre que $P \equiv Q$.

Solução:

Para demonstrar essa equivalência lógica, basta verificarmos que $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia, o que pode ser feito construindo uma tabela-verdade.

p	q	r	$(p \vee q)$	P	$(p \to r)$	$(q \to r)$	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Como $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia, temos que $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$.

Exemplo 7: sendo $P = p \to (q \wedge r)$ e $Q = (p \to q) \wedge (p \to r)$, mostre que $P \equiv Q$.

Solução:

Assim como os casos anteriores, para demonstrar essa equivalência lógica, basta verificarmos que $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

p	q	r	$(q \wedge r)$	P	$(p \to q)$	$(p \to r)$	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Portanto, concluímos que $(p \rightarrow (q \wedge r)) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$, pois $(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$ é uma tautologia.

Exemplo 8: sendo $P = (p \wedge q) \rightarrow r$ e $Q = p \rightarrow (q \rightarrow r)$, mostre que $P \equiv Q$.

Solução:

Trata-se de mais um caso análogo aos anteriores. Para demonstrar essa equivalência lógica, basta verificarmos que $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

p	q	r	$(p \wedge q)$	P	$(q \rightarrow r)$	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Portanto, as condicionais $(p \wedge q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ são equivalentes, ou seja, $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$. Essa é uma importante equivalência lógica muito utilizada para deduções e inferências, conhecida como regra da *exportação-importação*.

3.5 Proposições associadas a condicionais

Dada uma proposição condicional da forma $p \rightarrow q$, podemos associar a ela outras três proposições condicionais envolvendo apenas os átomos p e q:

- a proposição recíproca $q \rightarrow p$
- a proposição contrária $\neg p \rightarrow \neg q$
- a proposição contrapositiva $\neg q \rightarrow \neg p$

Observando a tabela-verdade dessas 4 proposições (as 3 descritas mais a original) podemos verificar duas importantes propriedades.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

- Propriedade 1: uma condicional e sua contrapositiva são equivalentes, ou seja, $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.
- Propriedade 2: a recíproca e a contrária de uma condicional $p \to q$ são equivalentes, ou seja, $q \to p \equiv \neg p \to \neg q$.

Um exemplo ilustrativo em linguagem natural é dado pela seguinte proposição condicional: se T é um triângulo equilátero, então, T é isóceles. A contrapositiva nesse caso seria: se T não é isóceles, então, T não é equilátero.

3.5.1 Equivalências notáveis

Existem diversas equivalências que são utlizadas no cálculo proposicional como forma de manipulação algébrica de proposições compostas. Esse assunto é conhecido como álgebra proposicional, e será justamente o tópico da próxima unidade. A seguir são listadas algumas dessas principais equivalências, conhecidas como propriedades dos operadores lógicos.

- Dupla negação: $\neg(\neg p) \equiv p$
- Leis idempotentes: $p \vee p \equiv p$ e $p \wedge p \equiv p$
- Leis comutativas: $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ e $p \wedge q \equiv q \wedge p$

- Leis associativas: $p \lor (q \lor r) \equiv (p \lor q) \lor r$ e $p \land (q \land r) \equiv (p \land q) \land r$

- Leis distributivas: $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$ e $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$

- Regra da bicondicional: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$

3.6 Conclusões

A presente Unidade apresentou dois conceitos fundamentais para o estudo da lógica proposicional: consequência e equivalência lógicas que definem a base para a definição das regras de inferência. Na próxima unidade estudaremos um pouco mais sobre álgebra proposicional, ou seja, sobre como podemos manipular fórmulas para simplificá-las ou encontrar representações logicamente equivalentes sem a necessidade da construção de tabelas-verdade.

3.7 Estudos complementares

Para os interessados em se aprofundar mais no tema tratado nesta unidade, recomendamos Souza (2008) e Nicoletti (2010). Os leitores poderão encontrar uma gama de resultados teóricos bastante relevantes que necessitam de um tratamento matemático mais formal e rigoroso.

3.8 Exercícios

1) Verifique se as seguintes consequências lógicas são válidas:

a) $(\neg p \to q), (r \land \neg q) \models (p \to r)$

b) $(\neg p \to q) \lor (r \land \neg q) \models (p \to \neg r)$

c) $(p \to q), (r \land \neg q) \models (p \to r)$

d) $\neg(p \lor q) \leftrightarrow (\neg r \to \neg q), \neg q \models (p \land \neg q) \lor r$

e) $(p \land q \land r) \to (\neg r \leftrightarrow \neg q), \neg r \models (p) \to r$

f) $p \to (q \lor r), p \models (p \land q)$

g) $(p \land q) \to (r \land s), \neg(\neg p), q \models s$

h) $p \models (p \lor q) \land (p \lor r)$

i) $p, \neg(\neg(p \to q)) \models q \lor \neg q$

j) $p \leftrightarrow (q \lor r), q \models p$

k) $p, (p \land q) \to \neg r, \neg r \to \neg s \models q \to \neg s$

l) $\neg p \leftrightarrow (\neg q \lor \neg r), r \land p \models p$

2) Mostre que as seguintes equivalências lógicas são válidas:

a) $\neg(\neg p \lor q) \equiv (p \land \neg q)$

b) $p \land (q \lor p) \equiv p$

c) $(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$

d) $(p \to q) \lor (p \to r) \equiv p \to (q \lor r)$

e) $(p \to q) \to r \equiv (p \land \neg r) \to \neg q$

f) $((p \lor q) \land \neg(r \to s)) \equiv \neg((\neg p \land \neg q) \lor (\neg r \lor s))$

3) Considere a seguinte sentença como verdadeira:

Se Maria for à escola, então Gabriel ou Paula irão, e se Maria não for à escola, então Paula e Rafael irão.

a) Escreva a sentença utilizando a linguagem da lógica proposicional.

b) É possível chegar a conclusão de quem certamente irá à escola? (Tente mostrar que ao menos uma das sentenças *Paula vai a escola*, *Gabriel vai a escola*, *Rafael vai a escola* é consequência lógica da sentença dada).

c) Refaça o exercício trocando o conectivo *ou* (entre Gabriel ou Paula) pelo conectivo *e*. O que acontece nesse caso?

3.9 Referências

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

UNIDADE 4

Álgebra proposicional

4.1 Primeiras palavras

A definição de uma álgebra das proposições é fundamental para o tratamento analítico de fórmulas da lógica proposicional. Isso é particularmente importante nos casos em que a construção de tabelas-verdade torna-se uma tarefa inviável ou demasiadamente trabalhosa. Esta unidade apresenta as principais propriedades dos operadores lógicos vistos até o momento, o que define a álgebra proposicional, bem como duas representações padrão para sentenças válidas da lógica proposicional, que são as formas normais conjuntiva e disjuntiva.

4.2 Problematizando o tema

Um assunto de fundamental importância na lógica proposicional é o estudo da álgebra das proposições. Uma pergunta que parece natural neste momento é justamente a seguinte: é possível manipular proposições lógicas com o intuito de simplificá-las ou mesmo reescrevê-las em uma outra representação equivalente, assim como acontece com expressões algébricas da matemática? A resposta para essa pergunta é justamente o principal objetivo desta unidade, que irá discutir as principais propriedades dos operadores lógicos que estudamos anteriormente, bem como duas representações padrões para uma proposição, que são as formas normais conjuntiva (FNC) e disjuntiva (FND), importantes tanto na identificação quanto na comparação de duas ou mais fórmulas bem-formadas. Com base nos conceitos que serão discutidos aqui, será possível, por exemplo, encontrar proposições logicamente equivalentes a uma dada proposição P, sem a utilização de tabelas-verdade. A grande vantagem disso reside no fato de que, enquanto o número de proposições atômicas em P cresce linearmente (n), o número de linhas da tabela-verdade cresce exponencialmente (2^n), tornando inviável sua construção. Por essa razão, o estudo da álgebra proposicional é indispensável.

4.3 Propriedades dos operadores conjunção e disjunção

Nesta seção serão discutidas equivalências importantes que são amplamente empregadas na simplificação e manipulação de expressões lógicas com o intuito de provar a validade de argumentos. Tais equivalências podem ser facilmente provadas utilizando o método das tabelas-verdade.

Um comentário relevante consiste no significado do termo *dual* em lógica proposicional. Para qualquer proposição P definida apenas em termos de símbolos atômicos $(p, q, \ldots)$, símbolos de verdade (V ou F) e dos conectivos $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção), seu par dual (proposição dual a P) é encontrado substituindo todas as ocorrências dos símbolos V por F e vice-versa, bem como todo conectivo $\wedge$ por $\vee$ e vice-versa. Por exemplo, o dual da proposição $(p \wedge q) \vee F$ é a proposição $(p \vee q) \wedge V$. A seguir é apresentada uma tabela que sumariza as propriedades básicas dos operadores de conjunção e disjunção.

Leis	Nomes
$p \wedge \neg p \equiv F$	Lei da contradição
$p \vee \neg p \equiv V$	Lei do terceiro excluído
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leis da identidade
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Leis da dominação
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leis idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Leis comutativas
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Leis associativas
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Leis distributivas

Note que cada uma das leis indicadas na tabela estão acompanhadas do seu dual, mostrando que o que vale para o operador $\wedge$ também vale para $\vee$.

4.3.1 Leis de De Morgan

Duas equivalências lógicas extremamente importantes no cálculo proposicional são as famosas Leis de De Morgan. Elas são fundamentais pois nos ensinam como negar uma conjunção/disjunção. As duas Leis de De Morgan são definidas pelas seguintes equivalências:

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Uma maneira simples de verificar tais equivalências é utilizando o método das tabelas-verdade para mostrar que $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ é uma tautologia, com o mesmo sendo válido para o caso das proposições duais. Observe que essas leis nos ensinam que:

- A negação de duas proposições que são simultaneamente verdadeiras equivale a afirmar que ao menos uma delas é falsa.
- Negar que ao menos uma de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

Em outras palavras, as Leis de De Morgan nos dizem que a negação transforma a conjunção em disjunção e vice-versa. Dessa forma, por exemplo, a negação da sentença *Carlos acorda cedo e dorme tarde* é *Carlos não acorda cedo ou não dorme tarde*. Por outro lado, a negação da sentença *Ela é professora ou médica* é *Ela não é professora e não é médica*. Outra observação pertinente acerca dessas leis é que elas apresentam uma maneira de definir a conjunção a partir da disjunção e vice-versa, bastando para isso negar as equivalências apresentadas no início desta seção para obter $(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

e $(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$. O exemplo a seguir mostra que as Leis de De Morgan podem ser generalizadas para conjunções ou disjunções envolvendo mais que dois símbolos atômicos.

Exemplo 1: demonstre, utilizando a álgebra proposicional, que as Leis de De Morgan continuam válidas para o caso de três componentes, ou seja,

a) $\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

b) $\neg(p \vee q \vee r) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

O item a) pode ser resolvido aplicando a seguinte sequência de operações:

	Proposições	Propriedade
1	$\neg(p \wedge q \wedge r)$	Associativa
2	$\neg((p \wedge q) \wedge r)$	De Morgan
3	$\neg(p \wedge q) \vee \neg r$	De Morgan
4	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	

Para o item b) a solução é obtida a partir da aplicação da mesma sequência de operações. Vale ressaltar que outra possibilidade para mostrar tais equivalências lógicas é utilizar o método das tabelas-verdade. Porém, enquanto o número de proposições atômicas cresce linearmente, o tamanho da tabela-verdade aumenta exponencialmente. Por esse motivo, o estudo da álgebra proposicional é essencial.

4.4 Propriedades da condicional e bicondicional

Frequentemente, proposições compostas são definidas em termos de operadores condicionais e bicondicionais. Um procedimento usualmente adotado na manipulação de expressões que contenham condicionais ou bicondicionais consiste na eliminação dos conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, através da utilização das equivalências lógicas mostradas na tabela a seguir.

	Proposições	Equivalências
1	$(p \to q)$	$\neg p \lor q$
2	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \to q) \land (q \to p)$
3	$(p \leftrightarrow q)$	$(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$

A equivalência (3) é mostrada utilizando a tabela-verdade a seguir, na qual é possível verificar que $P = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p))$ é uma tautologia.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \lor q$	$\neg q \lor p$	$(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$	P
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V

4.4.1 Equivalências notáveis

A partir das regras da álgebra proposicional e das equivalências lógicas apresentadas até o momento, podemos derivar outra importante lei conhecida como a Lei da absorção. A tabela abaixo mostra essa lei e sua respectiva forma dual, bem como uma outra importante equivalência notável, que é basicamente uma generalização da Lei da absorção.

Equivalências Notáveis	Nome
$(p \lor (p \land q)) \equiv p$ $(p \land (p \lor q)) \equiv p$	Lei da absorção
$(p \land q) \lor (\neg p \land q) \equiv q$ $(p \lor q) \land (\neg p \lor q) \equiv q$	

A seguir provaremos as duas equivalências acima utilizando apenas regras da álgebra proposicional. Note que, alternativamente, poderíamos utilizar tabelas-verdade para esse fim. A demonstração a seguir refere-se à prova da Lei da absorção. O símbolo V refere-se ao valor lógico verdade. Uma observação pertinente é com relação à passagem da primeira para a segunda linha da prova. A utilização da propriedade distributiva ocorre de maneira inversa ao que estamos acostumados, análoga ao que acontece com a operação de colocar uma variável em evidência, utilizada com frequência na manipulação de equações matemáticas.

$(p \vee (p \wedge q))$	$\equiv$	$(p \vee V) \vee (p \wedge q)$	Identidade
	$\equiv$	$p \wedge (V \vee q)$	Distributiva
	$\equiv$	$p \wedge V$	Dominação
	$\equiv$	p	
$(p \wedge (p \vee q))$	$\equiv$	$(p \vee F) \wedge (p \vee q)$	Identidade
	$\equiv$	$p \vee (F \wedge q)$	Distributiva
	$\equiv$	$p \vee F$	Dominação
	$\equiv$	p	

A prova da lei da absorção composta (e dual) segue na tabela abaixo.

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$	$\equiv$	$((p \wedge q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge q) \vee q)$	Distributiva
	$\equiv$	$((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)) \wedge (q \vee (p \wedge q))$	Distributiva e comutativa
	$\equiv$	$(V \wedge (q \vee \neg p)) \wedge (q \vee (p \wedge q))$	Terceiro excluído e comutativa
	$\equiv$	$(q \vee \neg p) \wedge q$	Identidade e absorção
	$\equiv$	$q \wedge (q \vee \neg p)$	Comutativa
	$\equiv$	q	Absorção
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$	$\equiv$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \vee ((p \vee q) \wedge q)$	Distributiva
	$\equiv$	$((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \vee (q \wedge (p \vee q))$	Distributiva e comutativa
	$\equiv$	$(F \vee (q \wedge \neg p)) \vee (q \wedge (q \vee p))$	Contradição e comutativa
	$\equiv$	$(q \wedge \neg p) \vee q$	Identidade e absorção
	$\equiv$	$q \vee (q \wedge \neg p)$	Comutativa
	$\equiv$	q	Absorção

4.5 Formas normais

Com o que foi apresentado até o momento, podemos observar que existem diversas maneiras de escrever uma mesma fórmula. Por exemplo, as fórmulas equivalentes $(p \rightarrow q) \wedge r \equiv (\neg p \vee q) \wedge r$ são duas representações lógicas do mesmo conceito. Uma pergunta natural que surge nesse momento é a seguinte: seria possível criar uma padronização para proposições compostas, afim de tornar a comparação de expressões algo mais simples e objetivo? Veremos a seguir que, em muitas situações é conveniente adotar uma notação padrão, com o objetivo de expressar proposições compostas de maneira única. Em resumo, a ideia de normalizar as fórmulas visa facilitar tanto a identificação quanto a comparação de duas ou mais proposições.

Duas formas normais são particularmente utilizadas para esse fim: a Forma Normal Conjuntiva (FNC) e a Forma Normal Disjuntiva (FND). Dada qualquer expressão da lógica proposicional, é sempre possível determinar uma expressão equivalente que esteja representada tanto na Forma Normal Conjuntiva quanto na Forma Normal Disjuntiva. Nas seções a seguir iremos descrever como transformar uma proposição qualquer para as formas normais.

4.5.1 Forma normal conjuntiva

Dizemos que uma fórmula proposicional P está na Forma Normal Conjuntiva (FNC) quando P for uma conjunção $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n$, em que cada p_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma *cláusula*, ou seja, é uma disjunção de átomos ou um átomo. Podemos dizer, então, que uma fórmula P está na FNC se e somente se:

a. contém como conectivos lógicos apenas $\wedge, \vee$ e $\neg$

b. $\neg$ opera apenas sobre átomos, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$

c. não apresenta operadores de negação sucessivos, como $\neg\neg$

d. $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$, ou seja, não há expressões como $p \vee (q \wedge r)$

Se Q é uma fórmula proposicional na forma normal conjuntiva equivalente a P, então Q é referenciada como $FNC(P)$.

Exemplo 2: para a fórmula proposicional $P = (\neg p \vee q) \rightarrow r$, temos,

$$FNC(P) = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \tag{4.1}$$

Pode-se mostrar que uma FNC é uma tautologia se e somente se cada elemento da conjunção for uma tautologia, ou seja, somente se cada cláusula for uma tautologia. As seguintes fórmulas proposicionais estão na FNC: $p \wedge (q \vee r)$, $p \wedge V$ e $\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge s$.

Já a expressão $p \wedge (r \vee (p \wedge s))$ não se encontra na FNC porque a disjunção $(r \vee (p \wedge s))$ contém uma conjunção como subfórmula. Para que uma expressão possa ser qualificada como uma fórmula proposicional na FNC, nenhuma disjunção deve ter uma conjunção como subfórmula. A seguir veremos um procedimento para a obtenção da FNC de uma proposição lógica P através da construção da tabela-verdade.

Tabela 4.1 Procedimento para obtenção da FNC via tabela-verdade.

1. Construir a tabela-verdade da proposição P
2. Procurar na tabela-verdade as linhas que avaliam P como F
3. Para cada uma dessas linhas, constrói-se a disjunção da seguinte maneira:

   a) Para cada átomo presente na fórmula proposicional, se o valor lógico do átomo é V, toma-se $\neg p$, e se for F, toma-se p
4. Determinar a conjunção das disjunções obtidas para cada linha F da tabela-verdade de P
5. Se a proposição P é uma tautologia (não há linha F na tabela-verdade), determina-se que $FNC(P) = p \vee \neg p$, na qual p é uma fórmula atômica

Exemplo 3: considere a fórmula $P = (\neg p \vee q) \rightarrow r$. Obtenha $FNC(P)$.

Solução:

Construindo a tabela-verdade de P, temos:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	
V	V	V	F	V	V	
V	V	F	F	V	F	$\Leftarrow$
V	F	V	F	F	V	
V	F	F	F	F	V	
F	V	V	V	V	V	
F	V	F	V	V	F	$\Leftarrow$
F	F	V	V	V	V	
F	F	F	V	V	F	$\Leftarrow$

Assim, de acordo com o procedimento descrito na Tabela 4.1, a $FNC(P)$ será composta por três cláusulas, cada uma referente a uma linha F da tabela-verdade de P. Seguindo o procedimento, temos que a segunda linha da tabela-verdade fornece a cláusula $(\neg p \vee \neg q \vee r)$, a sexta fornece a cláusula $(p \vee \neg q \vee r)$ e a última fornece a cláusula $(p \vee q \vee r)$. Portanto, temos como solução a seguinte representação:

$$FNC(P) = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \tag{4.2}$$

4.5.2 Forma normal disjuntiva

Dizemos que uma fórmula proposicional P está na Forma Normal Disjuntiva (FND) quando P for uma disjunção $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_n$, em que cada p_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma conjunção de átomos ou um átomo. Podemos dizer, então, que uma fórmula P está na FND se e somente se:

a. contém como conectivos lógicos apenas $\wedge, \vee$ e $\neg$

b. $\neg$ opera apenas sobre átomos, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$

c. não apresenta operadores de negação sucessivos, como $\neg\neg$

d. $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$, ou seja, não há expressões como $p \wedge (q \vee r)$

Analogamente ao caso anterior, se Q é uma fórmula proposicional na forma normal disjuntiva equivalente a P, então, Q é referenciada como $FND(P)$. Como exemplos de fórmulas proposicionais que estão na FNC, podemos citar:

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
- $p \vee F$
- $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee s$
- $(p \wedge q) \vee (r \wedge p \wedge \neg q) \vee \neg s$

Já a proposição $\neg(p \wedge q) \vee r$ não está na FND, pois ela contém uma subfórmula (não atômica) negada. Apenas subfórmulas atômicas podem aparecer negadas nas formas normais. Isso ocorre porque, de acordo com as Leis de De Morgan, a fórmula anterior ainda poderia ser simplificada. A seguir veremos um procedimento para a obtenção da FND de uma proposição lógica P através da construção da tabela-verdade, análogo ao que foi apresentado na seção anterior.

Exemplo 4: considere a fórmula $P = ((q \vee r) \rightarrow p) \wedge ((p \vee r) \rightarrow q)$. Obtenha $FNC(P)$.

Solução:

Construindo a tabela-verdade de P, temos:

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \vee r)$	$(q \vee r) \to p$	$(p \vee r) \to q$	P	
V	V	V	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
V	V	F	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
V	F	V	V	V	V	F	F	
V	F	F	F	V	V	F	F	
F	V	V	V	V	F	V	F	
F	V	F	V	F	F	V	F	
F	F	V	V	V	F	F	F	
F	F	F	F	F	V	V	V	$\Leftarrow$

De acordo com o procedimento descrito na Tabela 4.2, a $\mathrm{FND}(P)$ será composta por três subfórmulas, cada uma referente a uma linha V da tabela-verdade de P. Similarmente ao caso anterior da FNC, ao seguir as instruções do procedimento descrito na tabela 4.2, tem-se:

$$\mathrm{FND}(P) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \tag{4.3}$$

Tabela 4.2 Procedimento para obtenção da FND via tabela-verdade.

1. Construir a tabela-verdade da proposição P
2. Procurar na tabela-verdade as linhas que avaliam P como V
3. Para cada uma dessas linhas, constrói-se a conjunção da seguinte maneira:
   a) Para cada átomo presente na fórmula proposicional, se o valor lógico do átomo é V, toma-se p, e se for F, toma-se $\neg p$
4. Determinar a disjunção das conjunções obtidas para cada linha V da tabela-verdade de P
5. Se a proposição P é uma contradição (não há linha V na tabela-verdade), determina-se que $\mathrm{FND}(P) = p \wedge \neg p$, na qual p é uma fórmula atômica

Isso nos permite definir a seguinte equivalência:

$$((q \vee r) \rightarrow p) \wedge ((p \vee r) \rightarrow q) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad (4.4)$$

4.5.3 Obtenção algébrica de formas normais

Podemos obter as formas normais (FNC e FND) de proposições lógicas diretamente a partir de regras da álgebra proposicional, sem a necessidade de construção da tabela-verdade. Apresentaremos a discussão em termos da FNC, sendo que o processo pode ser facilmente adaptado para a FND, modificando apenas o último passo do procedimento.

A derivação da FNC de uma dada proposição P pode ser realizada por meio da substituição de subfórmulas por proposições equivalentes, sendo que esse processo deve ser repetido até que a forma normal seja obtida. O procedimento para a obtenção da FNC é descrito em detalhes na Tabela 4.3, conforme a definição encontrada em Nicoletti (2009).

Exemplo 5: obter a FNC da proposição lógica $\neg((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$ utilizando a álgebra proposicional.

Solução:

$\neg((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$	$\equiv$	$\neg(p \vee \neg q) \vee \neg(\neg r)$	De Morgan
	$\equiv$	$\neg(p \vee \neg q) \vee r$	Dupla negação
	$\equiv$	$\neg p \wedge \neg(\neg q) \vee r$	De Morgan
	$\equiv$	$\neg p \wedge q \vee r$	Dupla negação
	$\equiv$	$(\neg p \vee r) \wedge (q \vee r)$	Distributiva

Exemplo 6: obter a FNC da proposição lógica $(p \wedge q) \vee (r \wedge (s \vee t))$ utilizando a álgebra proposicional.

Solução:

$(p \wedge q) \vee (r \wedge (s \vee t))$	$\equiv$	$(p \vee (r \wedge (s \vee t))) \wedge (q \vee (r \wedge (s \vee t)))$	Distributiva
	$\equiv$	$(p \vee r) \wedge (p \vee s \vee t) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s \vee t)$	Distributiva

Tabela 4.3 Procedimento para obtenção da FNC via álgebra proposicional.

Para a obtenção da forma normal conjuntiva de uma fórmula P, os seguintes passos devem ser seguidos, quando passíveis de aplicação:

1. Utilizar repetidamente as equivalências a seguir para eliminação dos conectivos lógicos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

2. a) Utilizar repetidamente a Lei da dupla negação para a eliminação de negações múltiplas:

$\neg(\neg p) \equiv p$

b) Utilizar repetidamente as Leis de De Morgan para a redução do escopo da negação:

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

3. Quando a expressão obtida não tiver subfórmulas compostas negadas, as duas leis a seguir são utilizadas para reduzir o escopo do operador $\vee$ (comutativa e distributiva):

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

Exemplo 7: obter a FNC da expressão lógica $P = (\neg p \vee q) \to r$ utilizando tanto a regra da tabela-verdade quanto a sequência de regras da álgebra proposicional. Mostre a equivalência entre P e $FNC(P)$, bem como entre os resultados obtidos por ambos os métodos.

Solução:

Primeiramente, devemos construir a tabela-verdade de $(\neg p \vee q) \to r$. Note que ela já foi construída no Exemplo 2. Observando as linhas F da tabela-verdade, e de acordo com o procedimento descrito na Tabela 4.1, tem-se $FNC(P) = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$.

Para não sobrecarregar a notação, considere a seguinte nomeação de variáveis: $Q = (\neg p \vee \neg q \vee r)$, $R = (p \vee \neg q \vee r)$, $S = (p \vee q \vee r)$. Assim, podemos verificar a equivalência entre P e $FNC(P)$ mostrando que $P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge S)$ é uma tautologia. Isso pode ser feito através da construção da seguinte tabela-verdade:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	P	Q	R	S	$(Q \wedge R \wedge S)$	$P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge S)$
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V

Assim, como a última coluna da tabela-verdade é composta somente por valores lógicos V, $(P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge S))$ é uma tautologia, o que significa que $P \equiv (Q \wedge R \wedge S)$. A determinação da FNC de P através das regras da álgebra proposicional pode ser realizada de acordo com a seguinte sequência de passos:

$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	$\equiv$	$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg r$	Equivalência da implicação
	$\equiv$	$(\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee r$	De Morgan
	$\equiv$	$(p \wedge \neg q) \vee r$	Dupla negação
	$\equiv$	$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	Distributiva

A FNC obtida pelo método da tabela-verdade é equivalente à FNC obtida por meio de equivalências lógicas. Para evidênciar essa equivalência, $(Q \wedge R \wedge S) \equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$, basta verificar que a proposição $T = (Q \wedge R \wedge S) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (\neg q \vee r))$ é uma tautologia. A tabela-verdade abaixo mostra a equivalência em questão.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee r$	$\neg q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	$(Q \wedge R \wedge S)$	T
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	F	V

Portanto, foi mostrado que o resultado obtido por ambos os métodos são de fato equivalentes, ou seja, $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$.

Por fim, o procedimento para a obtenção da FND utilizando as regras da álgebra proposicional é idêntico ao apresentado para a FNC, com exceção do último passo (3) da Tabela 4.3. A Tabela 4.4 descreve o método em detalhes.

Tabela 4.4 Procedimento para obtenção da FND via álgebra proposicional.

Para a obtenção da forma normal conjuntiva de uma fórmula P, os seguintes passos devem ser seguidos, quando passíveis de aplicação:

1. Utilizar repetidamente as equivalências a seguir para eliminação dos conectivos lógicos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

2. a) Utilizar repetidamente a Lei da dupla negação para a eliminação de negações múltiplas:

$\neg(\neg p) \equiv p$

b) Utilizar repetidamente as Leis de De Morgan para a redução do escopo da negação:

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

3. Quando a expressão obtida não tiver subfórmulas compostas negadas, as duas leis a seguir são utilizadas para reduzir o escopo do operador $\wedge$ (comutativa e distributiva):

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Exemplo 8: esse exemplo ilustra algumas situações interessantes que podem ocorrer na álgebra proposicional. Além disso, trata-se de mais um exercício de como aplicar a Lei distributiva ao se utilizar os operadores $\wedge$ e $\vee$.

a) Obter a FND da proposição $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$.

Note que, neste caso, a expressão dada se encontra na FNC. Portanto, para a convertermos em FND é preciso aplicar a Lei distributiva, com o intuito de reduzir o escopo do operador $\wedge$. Assim, distribuindo o operador $\wedge$ podemos escrever:

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s))$$

Distribuindo novamente os operadores $\wedge$ internos, temos:

$(p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) \equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s))$

A fórmula resultante já está na FND. Basta remover os parêntesis mais externos para evidenciar a notação.

b) Obter a FNC da proposição $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$.

Agora, temos como ponto de partida uma expressão na FND (dual da proposição anterior). Distribuindo o operador $\vee$, temos:

$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s))$

Distribuindo novamente os operadores $\vee$ internos, temos:

$(p \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s)) \equiv ((p \vee r) \wedge (p \vee s)) \wedge ((q \vee r) \wedge (q \vee s))$

c) Obter a FNC e a FND da proposição $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$.

Note que, neste caso, a proposição inicial já se encontra na FND, bastando remover os parêntesis em torno de $r \vee s$ para evidenciar tal fato. Para escrevermos a proposição na FNC, primeiramente devemos utilizar as Leis associativa e comutativa:

$((p \wedge q) \vee (r \vee s)) \equiv (r \vee (p \wedge q)) \vee s$

Aplicando a distributiva no $\vee$ mais interno e, em seguida, a Lei comutativa, temos:

$(r \vee (p \wedge q)) \vee s \equiv s \vee ((r \vee p) \wedge (r \vee q))$

Aplicando a distributiva no $\vee$ mais externo e a Lei associativa, temos finalmente:

$s \vee ((r \vee p) \wedge (r \vee q)) \equiv (s \vee r \vee p) \wedge (s \vee r \vee q)$

4.6 Conclusões

A presente unidade apresentou uma introdução à álgebra proposicional, através das propriedades dos operadores lógicos e de equivalências lógicas importantes. A principal motivação para este estudo é o fato de a álgebra das proposições definir as bases do cálculo proposicional, pois fornece as ferramentas necessárias para que, juntamente com as regras de inferência, seja possível deduzir conclusões lógicas válidas a partir de um conjunto inicial de fatos (premissas). Além disso, foi apresentado o conceito de forma normal, através da definição das formas normais conjuntiva (FNC) e disjuntiva (FND), que além de ajudar a padronizar a notação, facilita a identificação e comparação entre duas ou mais proposicões compostas. Foram discutidos dois métodos para encontrar a FNC e a FND de proposições compostas em geral, um baseado na construção de tabelas-verdade e outro na utilização das regras da álgebra proposicional.

4.7 Estudos complementares

Para o leitor interessado em se aprofundar no assunto tratado nesta unidade, recomendamos Rautenberg (2010) e o clássico Hilbert & Ackermann (1999). Em ambos os livros são apresentadas discussões importantes sobre a álgebra proposicional e formas normais, relevantes para um estudo mais formal da lógica matemática.

Um assunto diretamente relacionado a esta unidade e de extrema relevância para a computação é a definição do operador lógico denominado 'NÃO-E', usualmente representado por uma barra vertical $|$. A operação $p|q$ é equivalente à $\neg(p \wedge q)$, ou seja, $p|q \equiv \neg(p \wedge q)$. Existe um resultado teórico que garante ser possível a definição de qualquer função lógica de duas variáveis (V e F, ou 0 e 1) utilizando apenas a função lógica 'NÃO-E'. Apesar de teórico, tal resultado traz uma série de implicações práticas, como, por exemplo, o fato de qualquer circuito digital poder ser construído apenas com um tipo de componente eletrônico (as portas lógicas 'NÃO-E'), o que representa uma enorme economia no custo de produção de placas e dispositivos digitais. Maiores detalhes sobre esse resultado e a teoria matemática que o fundamenta podem ser encontrados em Souza (2008).

4.8 Exercícios

1) Utilizar a Lei de De Morgan para negar a sentença: *Rosas são vermelhas e violetas são azuis*.

2) Utilizando tanto o método da tabela-verdade quanto a álgebra proposicional, determine a FNC de cada uma das proposições a seguir:

a) $p \rightarrow \neg q$ b) $\neg(p \wedge q)$

c) $(p \wedge q) \vee q$ d) $p \wedge \neg(q \vee r)$

e) $\neg(p \wedge (q \vee r))$ f) $p \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

g) $\neg(p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$ h) $\neg(p \rightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$

3) Utilizando tanto o método da tabela-verdade quanto a álgebra proposicional, determine a FND de cada uma das proposições a seguir:

a) $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$ b) $\neg q \wedge (q \rightarrow r)$

c) $(p \rightarrow q) \vee \neg p$ d) $(\neg p \vee q) \vee q$

e) $\neg(p \wedge (q \vee r))$ f) $p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow s$

g) $\neg(p \vee q) \wedge (s \rightarrow t)$ h) $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

4) Obtenha uma fórmula equivalente à $\neg(p \wedge q) \vee r$, apenas com o operador $\rightarrow$.

5) Demonstrar, utilizando as regras da álgebra proposicional, as Leis de De Morgan para quatro componentes:

a) $\neg(p \wedge q \wedge r \wedge s) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s$

b) $\neg(p \vee q \vee r \vee s) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s$

Desafio: o problema de Post (Emil Leon Post, 1897-1954) consiste em determinar se para toda tabela-verdade existe uma fórmula que a determine. Em termos práticos, dada uma tabela-verdade, deseja-se saber qual é a expressão lógica correspondente. Este problema é muito importante para a computação, pois é a base para o projeto de circuitos digitais. Considere a seguinte tabela-verdade:

p	q	r	P
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Mostre, através da álgebra proposicional, que $P \equiv ((q \vee r) \rightarrow p) \wedge ((p \vee r) \rightarrow q)$. Sugestão: considere a FND de P como ponto de partida.

4.9 Referências

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of Mathematical Logic*. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1999.

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

RAUTENBERG, W. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. 3. ed. Berlin: Springer, 2010.

SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

4.10 Referências consultadas

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

UNIDADE 5

Inferência lógica

5.1 Primeiras palavras

Um dos principais objetivos da lógica matemática, mais precisamente da lógica proposicional, é justamente o estudo de estruturas formais que possam ser empregadas na representação e dedução de conhecimento (SOUZA, 2008, p. 79). Assim, além de definir uma maneira de representação do conhecimento (como pudemos ver nas unidades anteriores), o estudo da lógica também compreende a análise formal de mecanismos de dedução de conhecimento a partir de um dado conjunto de fatos existentes *a priori*. Isso é justamente a definição de cálculo proposicional, e será o tópico abordado nesta unidade.

5.2 Problematizando o tema

O principal problema discutido nesta unidade é a verificação da validade de uma conclusão lógica a partir de um conjunto de proposições dadas (premissas). Será apresentado um conjunto de regras de inferência lógica que nos permite, a partir de um conjunto inicial de fatos, obter conclusões logicamente válidas, muitas vezes não óbvias à primeira vista. Dentro desse contexto, um conceito fundamental que será discutido é o de argumento válido, que define a base do raciocínio lógico. O principal objetivo desta unidade é justamente verificar a validade de argumentos, que nada mais são que sequências de proposições lógicas seguidas de uma conclusão.

5.3 Argumento válido

Podemos expressar padrões de raciocínio de diversas maneiras. Na linguagem natural, em geral, a conclusão é colocada após as premissas e indicada por algumas palavras-chave como *então*, *logo*, *portanto*, *como consequência*, *conclui-se*, etc (NICOLETTI, 2009, p. 45). Dizemos que um argumento é válido se a conclusão segue logicamente as premissas ou, em outras palavras, se a conclusão é uma consequência lógica das premissas.

Definição 5.1: um *argumento* é uma sequência $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ de proposições, com $n \geq 1$, na qual as $n-1$ primeiras proposições P_i são chamadas de premissas e a última proposição, P_n, é chamada de conclusão. Denota-se um argumento por:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \tag{5.1}$$

Um argumento $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n$ é dito válido se e somente se $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1} \models P_n$, ou seja, se e somente se P_n é uma consequência lógica de $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$, o que, conforme visto na Unidade 3, acontece se $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$ for uma tautologia. Um argumento válido pode ser lido de diversas maneiras, dentre as quais (NICOLETTI, 2009):

- $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$ acarretam P_n
- P_n decorre de $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$
- P_n é consequência lógica de $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$

Podemos verificar a validade de um argumento através de tabelas-verdade, mas isso pode ser um trabalho longo e árduo, uma vez que a dimensão dessa tabela depende diretamente do número de átomos existentes na proposição. Por exemplo, a verificação da validade de um argumento que envolve 8 proposições atômicas requer a construção de uma tabela-verdade com $2^8 = 256$ linhas.

Por essa razão, uma das maneiras mais usuais de mostrar que um determinado argumento é válido é através de um procedimento que faz uso de algumas regras de inferências, que nada mais são que argumentos válidos notáveis já conhecidos (e por isso tabelados), bem como de equivalências lógicas (através de regras da álgebra proposicional). Esse processo fornece a noção básica do conceito de derivação formal, também conhecido como prova formal, tópico que será estudado em maiores detalhes na unidade 6. Esses argumentos válidos notáveis apresentam um conjunto de regras que definem as operações básicas para a realização de inferências lógicas.

Uma observação relevante apontada em Nicoletti (2009) é que, embora existam diferentes sistemas para a realização de derivações, todos eles têm algumas características em comum, que são:

- consideram uma lista de regras de inferência, que nada mais são que argumentos válidos conhecidos;

- a derivação nada mais é que uma lista de proposições lógicas que, inicialmente, é vazia. Novas proposições podem ser adicionadas a essa lista somente se forem premissas (representarem os fatos conhecidos *a priori*), ou se puderem ser obtidas a partir de proposições anteriores (que já estão na lista) através da aplicação de regras de inferência. Esse processo continua até que a conclusão seja obtida.

Outra observação pertinente é o fato de na grande maioria dos sistemas para derivações formais o conjunto de regras de inferência ser fixo. Para os nossos propósitos, consideraremos o conjunto de regras de inferência apresentado pela Tabela 5.1, adaptada de Nicolleti (2009).

Alguns comentários relevantes acerca dos argumentos válidos serão apresentados. Primeiramente, a regra da inconsistência é valida, pois como $p \wedge \neg p$ é sempre avaliada como F, o argumento $p, \neg p \vdash q$ é sempre válido, uma vez que $F \rightarrow q$ é trivialmente verdade (condição conhecida como vacuidade).

Outro aspecto que merece destaque é referente à *regra de casos*. Essa regra é baseada na seguinte equivalência lógica:

$$((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q) \equiv ((p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)) \quad (5.2)$$

Isso nos permite escrever a seguinte equivalência:

$$(p \to q) \land (\neg p \to q) \equiv (p \lor \neg p) \to q \equiv V \to q \equiv F \lor q \equiv q \qquad (5.3)$$

ou seja, $((p \to q) \land (\neg p \to q)) \to q$ é uma tautologia, o que implica dizer que q é uma consequência lógica de $(p \to q) \land (\neg p \to q)$ ou, em outras palavras, que $p \to q, \neg p \to q \vdash q$ é um argumento válido.

Tabela 5.1 Regras de inferência.

Regra de inferência	Nome da regra
$p, p \to q \models q$	*modus ponens* (MP)
$\neg q, p \to q \models \neg p$	*modus tollens* (MT)
$p \to q, q \to r \models p \to r$	silogismo hipotético (SH ou regra da cadeia)
$p \lor q, \neg p \models q$ $p \lor q, \neg q \models p$	silogismo disjuntivo (SD) silogismo disjuntivo (variante)
$p \land q \models p$ $p \land q \models q$	simplificação (S) simplificação (variante)
$p, q \models p \land q$	conjunção (C)
$p \to q \models p \to (p \land q)$	absorção (ABS)
$p \to q, \neg p \to q \models q$	de casos (*)
$p \models p \lor q$ $q \models p \lor q$	adição (AD) adição (variante)
$p \to q, r \to s, p \lor r \models q \lor s$	dilema construtivo (DC)
$p \to q, r \to s, \neg q \lor \neg s \models \neg p \lor \neg r$	dilema destrutivo (DD)
$p \to q \models \neg q \to \neg p$	contraposição (CP)
$p, \neg p \models q$	inconsistência (I)
$p \to q, q \to p \models p \leftrightarrow q$	introdução da equivalência (IE)
$p \leftrightarrow q \models p \to q$ $p \leftrightarrow q \models q \to p$	eliminação da equivalência (EE) eliminação da equivalência (variante)

5.4 Utilizando as regras de inferência

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos simples de aplicação das principais regras de inferência listadas na tabela anterior, na dedução de conclusões a partir de premissas dadas. Convém lembrar que tais regras de inferência nada mais são que argumentos válidos notáveis.

- **Regra da adição**: dada uma proposição verdadeira qualquer p, podemos deduzir sua disjunção com qualquer outra proposição q, isto é, $p \vee q$.

  Exemplos:

  a) Suponha a premissa inicial $(p \wedge q)$. Então, aplicando a *regra da adição*, podemos deduzir, por exemplo, $(p \wedge q) \vee r$ ou ainda $(p \wedge q) \vee s$.

  b) $(x < 0) \models (x < 0) \vee (x = 2)$, pois $(x < 0) \vee (x = 2)$ é consequência lógica de $(x < 0)$.

  c) Um exemplo em linguagem natural: o céu é azul. Logo, o céu é azul ou verde.

- **Regra da simplificação**: dada uma conjunção de duas proposições, $p \wedge q$, podemos deduzir cada uma das proposições individuais, p ou q.

  Exemplos:

  a) Suponha a premissa $(p \vee q) \wedge r$. Então, aplicando a *regra da simplificação*, podemos deduzir tanto $(p \wedge q)$ quanto r.

  b) $(x \in A) \wedge (x \in B) \models (x \in A)$, pois obviamente $(x \in A)$ é consequência lógica de $(x \in A) \wedge (x \in B)$.

  c) Um exemplo em linguagem natural: Débora toca piano e violão. Logo, Débora toca piano.

- **Regra da conjunção**: permite, a partir de duas proposições dadas p e q (premissas), deduzir sua conjunção, $p \wedge q$.

  Exemplos:

a) Suponha as premissas $(p \vee q)$ e $\neg r$. Então, aplicando a *regra da conjunção*, podemos deduzir $(p \vee q) \wedge \neg r$.

b) $(x < 5), (x > 1) \models (x < 5) \wedge (x > 1)$, uma vez que, trivialmente, $(x < 5) \wedge (x > 1)$ é consequência lógica da conjunção das premissas.

c) Um exemplo em linguagem natural é: Rafael estuda. Rafael trabalha. Logo, Rafael estuda e trabalha.

- **Regra da absorção**: permite, a partir de uma condicional $p \to q$ dada como premissa, deduzir uma outra condicional com o mesmo antecedente p, mas cujo consequente é a conjunção de p com q, isto é, $p \to (p \wedge q)$.

  Exemplos:

  a) Suponha a premissa $(p \vee q) \to r$. Então, aplicando a *regra da absorção*, podemos deduzir $(p \vee q) \to ((p \vee q) \wedge r)$.

  b) $(x \in A) \to (x \in A \cup B) \models (x \in A) \to (x \in A) \wedge (x \in A \cup B)$, dado que $(x \in A) \to (x \in A) \wedge (x \in A \cup B)$ é consequência lógica de $(x \in A) \to (x \in A \cup B)$.

  c) Um exemplo em linguagem natural soa como uma repetição: se eu entro na água, então, eu entro na água e fico molhado.

- **Regra *modus ponens***: esta lei, também conhecida como *regra de separação*, nos permite deduzir uma conclusão q, a partir das premissas $p \to q$ e p. É a regra mais utilizada em inferência lógica.

  Exemplos:

  a) Considere as premissas $(p \wedge q)$ e $(p \wedge q) \to r$. Então, aplicando a regra *modus ponens*, podemos deduzir r.

  b) $(x \in A \cap B), ((x \in A \cap B) \to (x \in A)) \models (x \in A)$, ou seja, $(x \in A)$ é consequência lógica de $(x \in A \cap B) \wedge ((x \in A \cap B) \to (x \in A))$.

  c) Um exemplo em linguagem natural é: se chove, faz frio. Chove. Logo, faz frio.

- **Regra *modus tollens***: permite, a partir da premissa $p \to q$ (condicional) e da negação do consequente, $\neg q$, deduzir a negação do antecedente, $\neg p$.

  Exemplos:

  a) Considere as premissas $(q \wedge r) \to s$ e $\neg s$. Então, podemos deduzir $\neg(q \wedge r)$.

  b) Sejam as premissas $p \to \neg q$ e $\neg(\neg q)$. Aplicando *modus tollens* temos como conclusão a proposição $\neg p$.

  c) $((x \notin A) \to (x \notin A \cap B)), (x \in A \cap B) \models (x \in A)$, ou seja, $(x \in A)$ é consequência lógica de $((x \notin A) \to (x \notin A \cap B)) \wedge (x \in A \cap B)$. Em outras palavras, se x não pertence a A, então, x não pertence à intersecção de A com B. Agora, se é verdade que x pertence à intersecção de A com B, então x pertence à A.

  d) Um outro exemplo em linguagem natural seria: se chove, então eu não saio de casa. Eu saio de casa. Logo, não chove.

- **Regra do silogismo hipotético**: corresponde à propriedade transitiva do conectivo $\to$. Dadas duas condicionais como premissas, $p \to q$ e $q \to r$, de modo que o consequente da primeira seja idêntico ao antecedente da segunda, esta regra permite a dedução de uma outra condicional, $p \to r$ (conclusão). Devido a essa propriedade esta, lei também é conhecida como regra da cadeia.

  Exemplos:

  a) Considere as premissas $\neg p \to (q \vee r)$ e $(q \vee r) \to \neg s$. Então, aplicando a *regra do silogismo hipotético*, podemos concluir $\neg p \to \neg s$.

  b) $(|x| = 0 \to x = 0), (x = 0 \to x + 1 = 1) \models (|x| = 0 \to x + 1 = 1)$, ou seja, $(|x| = 0 \to x + 1 = 1)$ é consequência lógica de $(|x| = 0 \to x = 0) \wedge (x = 0 \to x + 1 = 1)$.

  c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se o sol se põe, então, fica escuro. Se fica escuro, então, as luzes da cidade se acendem. Portanto, se o sol se põe, então, as luzes da cidade se acendem.

- **Regra do silogismo disjuntivo**: a partir de uma disjunção $p \vee q$, e da negação de uma das proposições, $\neg p$ (ou $\neg q$), esta regra permite deduzir a outra proposição.

  Exemplos:

  a) Considere as premissas $(p \wedge q) \vee r$ e $(\neg r)$. Então, aplicando a *regra do silogismo disjuntivo*, podemos deduzir $(p \wedge q)$.

  b) $(x = 0 \vee x = 1), (x \neq 1) \models (x = 0)$, ou seja, $(x = 0)$ é consequência lógica de $(x = 0 \vee x = 1) \wedge (x \neq 1)$.

  c) Outro exemplo em linguagem natural seria: Maria está falando baixo demais ou João tem problemas auditivos. Maria não está falando baixo demais. Portanto, João tem problemas auditivos.

- **Regra do dilema construtivo**: a partir de três premissas, sendo duas condicionais com antecedentes e consequentes distintos ($p \rightarrow q$, $r \rightarrow s$), e a disjunção de seus antecedentes, $p \vee r$, esta regra permite concluir a disjunção dos consequentes destas condicionais, $q \vee s$.

  Exemplos:

  a) Considere as premissas $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$, $s \rightarrow t$ e $(p \wedge q) \vee s$. Então, aplicando a *regra do dilema construtivo*, podemos deduzir $\neg r \vee t$.

  b) $(x < y \rightarrow x = 1), (x > y \rightarrow x = 2), (x < y \vee x > y) \models (x = 1 \vee x = 2)$, ou seja, $(x = 1 \vee x = 2)$ é consequência lógica de $(x < y \rightarrow x = 1) \wedge (x > y \rightarrow x = 2) \wedge (x < y \vee x > y)$.

  c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se estou com fome, então, como. Se estou com sede, então, bebo água. Estou com fome ou com sede. Logo, como ou bebo.

- **Regra do dilema destrutivo**: esta regra é bastante similar à anterior. A partir de três premissas, sendo duas condicionais com antecedentes e consequentes distintos ($p \rightarrow q$, $r \rightarrow s$), e a disjunção da negação de seus consequentes, $\neg q \vee \neg s$, esta regra permite concluir a disjunção da negação dos antecedentes destas condicionais, $\neg p \vee \neg r$.

  Exemplos:

  a) Considere as premissas $\neg q \rightarrow r$, $p \rightarrow \neg s$ e $\neg r \vee s$. Então, aplicando a *regra do dilema destrutivo*, podemos deduzir $q \vee \neg p$.

  b) $(x < 10 \rightarrow x = 1), (x > 20 \rightarrow x = 2), (x \neq 1 \vee x \neq 2) \models (x \geq 10 \vee x \leq 20)$, ou seja, $(x \geq 10 \vee x \leq 20)$ é consequência lógica de $(x < 10 \rightarrow x = 1) \wedge (x > 20 \rightarrow x = 2) \wedge (x \neq 1 \vee x \neq 2)$.

  c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se há luz do sol, então, é dia. Se chove, então, há nuvens no céu. Não é dia ou não há nuvens no céu. Logo, não há luz do sol ou não chove.

- **Regra de casos**: a partir de duas premissas condicionais com mesmo consequente e antecedentes complementares ($p \rightarrow q$, $\neg p \rightarrow q$), esta regra permite concluir o antecedente comum destas condicionais, q.

  Exemplos:

  a) Considere as premissas $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$, $\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)$. Então, aplicando *a regra de casos*, podemos deduzir $(\neg q \wedge r)$.

  b) $(x < 10 \rightarrow y = 1), (x \geq 10 \rightarrow y = 1) \models (y = 1)$, ou seja, $(y = 1)$ é consequência lógica de $(x < 10 \rightarrow y = 1) \wedge (x \geq 10 \rightarrow y = 1)$.

  c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se chove, então, não saio de casa e estudo. Se não chove, então, não saio de casa e estudo. Logo, não saio de casa e estudo.

5.4.1 Exercícios resolvidos

1) Escreva cada um dos argumentos válidos a seguir na forma condicional:

a) $\neg p, \neg q \to p \models q$

Solução: sabemos que se argumento acima é válido, então, q é consequência lógica das premissas, ou seja, escrevendo na forma condicional, temos:

$(\neg p \wedge (\neg q \to p)) \to q$

b) $p \to q \models \neg(p \wedge \neg q)$

Solução: escrevendo na forma condicional temos a seguinte proposição tautológica:

$(p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$

c) $p, p \to q, \neg q \vee (r \wedge s) \models (r \wedge s)$

Solução: reescrevendo o argumento válido na forma condicional, temos a tautologia:

$(p \wedge (p \to q) \wedge (\neg q \vee (r \wedge s))) \to (r \wedge s)$

2) Utilize cada uma das regras de inferência citadas para concluir adequadamente cada um dos seguintes conjuntos de premissas:

a) modus ponens

P1: $(x > y \wedge y > z) \to x > z$

P2: $x > y \wedge y > z$

C: $x > z$ $\Leftarrow$ MP em P1 e P2

b) modus tollens

P1: $(p \leftrightarrow q) \to \neg(r \wedge s)$

P2: $\neg(\neg(r \wedge s))$

C: $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ $\Leftarrow$ MT em P1 e P2

c) silogismo disjuntivo

P1: $(s \rightarrow p) \vee (r \wedge t)$

P2: $\neg(r \wedge t)$

C: $(s \rightarrow p) \equiv (\neg s \vee p)$ $\Leftarrow$ SD em P1 e P2

d) silogismo hipotético

P1: $(s \vee t) \rightarrow (r \wedge q)$

P2: $(r \wedge q) \rightarrow \neg p$

C: $(s \vee t) \rightarrow \neg p$ $\Leftarrow$ SH em P1 e P2

e) dilema construtivo

P1: $p \rightarrow r$

P2: $\neg q \rightarrow \neg s$

P3: $p \vee \neg q$

C: $(r \vee \neg s)$ $\Leftarrow$ DC em P1, P2 e P3

f) dilema destrutivo

P1: $p \rightarrow (\neg r \wedge q)$

P2: $\neg(\neg r \wedge q) \vee \neg s$

P3: $\neg q \rightarrow s$

C: $(\neg p \vee \neg\neg q) \equiv (\neg p \vee q)$ $\Leftarrow$ DD em P1, P3 e P2

Note que o argumento é válido independentemente da ordem em que as premissas aparecem.

5.5 Validade de argumentos mediante tabelas-verdade

As tabelas-verdade são ferramentas poderosas na verificação da validade de argumentos. Suponha que se deseja testar a validade do seguinte argumento:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash q \tag{5.4}$$

Uma maneira de resolver este problema consiste em verficar se q é consequência lógica das premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Para isso, basta verificar se a forma condicional do argumento $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ é uma tautologia. Esse problema foi objeto de estudo da unidade 3 do nosso curso (consequência e equivalência lógicas). A seguir veremos alguns exemplos de como verificar a validade de argumentos mediante tabelas-verdade.

Exemplo 1: verificar mediante tabela-verdade se é válido o argumento $p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q$.

Solução:

O primeiro passo consiste na especificação da forma condicional do argumento, que é $((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$. A seguir, construímos a tabela-verdade para a proposição resultante:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Como a forma condicional do argumento não é uma tautologia, $\neg q$ não é consequência lógica das premissas e, portanto, o argumento em questão não é válido.

Exemplo 2: verificar mediante tabela-verdade se é válido o argumento seguinte.

Se $x = 0$, então $x + y = y$

Se $y = z$, então $x + y \neq y$

Logo, se $x = 0$, então $y \neq z$

Solução:

O primeiro passo consiste na representação do argumento acima na forma simbólica, em termos de proposições simples. Chamando as proposições simples $x = 0$ de p, $x + y = y$ de q e $y = z$ de r, o argumento pode ser escrito na linguagem da lógica proposicional como:

$$p \to q, r \to \neg q \vdash p \to \neg r \tag{5.5}$$

Assim, para verificar se o argumento é válido basta checar se sua forma condicional é uma tautologia (ou seja, verificar se a conclusão é consequência lógica das premissas). A forma condicional do argumento é dada por:

$$P = ((p \to q) \wedge (r \to \neg q)) \to (p \to \neg r) \tag{5.6}$$

A tabela-verdade para a proposição resultante é dada por:

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$(p \to q)$	$(r \to \neg q)$	$(p \to \neg r)$	$(p \to q) \wedge (r \to \neg q)$	P
V	V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Como a forma condicional do argumento é uma tautologia, ou seja, a proposição $(p \rightarrow \neg r)$ é consequência lógica das premissas, o argumento em questão é válido.

Exemplo 3: verificar mediante tabela-verdade a validade do argumento seguinte.

Se Carlos está com fome, então, ele come.

Carlos dorme ou não come.

Carlos está acordado.

Portanto, Carlos não está com fome.

Observação: dormir é equivalente a não estar acordado.

Solução:

Assim como o exemplo anterior, o primeiro passo consiste na representação do argumento acima na forma simbólica, em termos de proposições simples. Chamando as proposições simples *Carlos está com fome*, *Carlos come* e *Carlos está acordado* de p, q e r, respectivamente, o argumento pode ser escrito na linguagem da lógica proposicional como:

$$p \rightarrow q, \neg r \vee \neg q, r \vdash \neg p \tag{5.7}$$

Assim, para verificar se o argumento é válido, basta checar se sua forma condicional é uma tautologia (ou seja, verificar se a conclusão é consequência lógica das premissas). A forma condicional do argumento é dada por:

$$P = (((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge r) \rightarrow \neg p) \tag{5.8}$$

A tabela-verdade para a proposição resultante é mostrada a seguir.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$(p \to q)$	$(\neg r \vee \neg q)$	$(p \to q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge r$	P
V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F	V

Como a forma condicional do argumento é tautológica, ou seja, $\neg p$ é consequência lógica das premissas, o argumento em questão é válido.

5.6 Validade de argumentos mediante regras de inferência

Apesar de funcional, o método baseado em tabelas-verdade torna-se cada vez mais ineficiente e trabalhoso à medida que o número de proposições simples aumenta. Uma maneira mais elegante e eficiente de verificar a validade de argumentos é mediante o uso de regras de inferência. A ideia consiste em concluir logicamente a partir das premissas, utilizando as regras descritas nas seções 1.1 e 1.2. Essa abordagem representa a essência do cálculo proposicional. A seguir veremos uma série de exemplos de como testar a validade de argumentos através de regras de inferência.

Exemplo 4: verificar mediante regras de inferência a validade do argumento $p \to q, p \wedge r \vdash q$.

Solução:

A sequência de regras de inferência aplicadas para a resolução do problema é mostrada na tabela abaixo. Primeiramente, apenas copiamos as premissas do argumento no início da sequência. A seguir, por sucessivas aplicações das regras de inferência nas proposições já existentes, chega-se à conclusão, o que verifica a validade do argumento. Tal procedimento é uma descrição bastante informal do conceito de prova ou dedução, que será apresentado de maneira detalhada na unidade 6.

(1)	$p \to q$	premissa	
(2)	$p \wedge r$	premissa	
(3)	p	simplificação	2
(4)	q	*modus ponens*	$1, 3$

Aplicando a *regra da simplificação* na segunda premissa, inferimos p. De p (premissa 3) e $p \to q$ (premissa 1), aplicando a regra *modus ponens*, chega-se à conclusão q. Portanto, como concluímos q a partir das premissas, o argumento dado é válido.

Exemplo 5: verificar mediante regras de inferência a validade do argumento $p \to q, (p \wedge q) \to r, \neg(p \wedge r) \vdash \neg p$.

Solução:

Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$p \to q$	premissa	
(2)	$(p \wedge q) \to r$	premissa	
(3)	$\neg(p \wedge r)$	premissa	
(4)	$p \to (p \wedge q)$	absorção	1
(5)	$p \to r$	silogismo hipotético	$2, 4$
(6)	$p \to (p \wedge r)$	absorção	5
(7)	$\neg p$	*modus tollens*	$3, 6$

Exemplo 6: verificar que o argumento seguinte é válido.

$$(p \vee q) \rightarrow r, (r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)), (p \wedge s) \vdash s \leftrightarrow t \tag{5.9}$$

Solução: note que nesse caso o argumento é composto por 5 proposições simples, o que resultaria em uma tabela-verdade de 32 linhas. Esse é um exemplo concreto de caso em que a verificação via tabela-verdade é ineficiente e bastante trabalhosa. Por essa razão, verificaremos a validade do argumento através de regras de inferência. Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$(p \vee q) \rightarrow r$	premissa	
(2)	$(r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t))$	premissa	
(3)	$(p \wedge s)$	premissa	
(4)	p	simplificação	1
(5)	$p \vee q$	adição	3, 4
(6)	r	*modus ponens*	1, 5
(7)	$r \vee q$	adição	6
(8)	$p \rightarrow (s \leftrightarrow t)$	*modus ponens*	2, 7
(9)	$(s \leftrightarrow t)$	*modus ponens*	4, 8

Exemplo 7: verificar que o argumento seguinte é válido.

$$(p \vee q) \rightarrow r, (r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)), (p \wedge s) \vdash s \leftrightarrow t \tag{5.10}$$

Solução: note que, assim como no caso anterior, o argumento é composto por 5 proposições simples, o que resultaria em uma tabela-verdade de 32 linhas. Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$(p \vee q) \rightarrow r$	premissa	
(2)	$(r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t))$	premissa	
(3)	$(p \wedge s)$	premissa	
(4)	p	simplificação	1
(5)	$p \vee q$	adição	3, 4
(6)	r	*modus ponens*	1, 5
(7)	$r \vee q$	adição	6
(8)	$p \rightarrow (s \leftrightarrow t)$	*modus ponens*	2, 7
(9)	$(s \leftrightarrow t)$	*modus ponens*	4, 8

Exemplo 8: verificar que o argumento seguinte é válido.

$$(p \wedge q) \rightarrow r, r \rightarrow s, t \rightarrow \neg u, t, \neg s \vee u \vdash \neg p \vee \neg q \qquad (5.11)$$

Solução: trata-se de outro exemplo em que a verificação mediante tabela-verdade é inviável. Por esse motivo, verificaremos a validade do argumento através de regras de inferência. Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa	
(2)	$r \rightarrow s$	premissa	
(3)	$t \rightarrow \neg u$	premissa	
(4)	t	premissa	
(5)	$\neg s \vee u$	premissa	
(6)	$\neg u$	*modus ponens*	3, 4
(7)	$\neg s$	silogismo disjuntivo	5, 6
(8)	$\neg r$	*modus tollens*	2, 7
(9)	$\neg(p \wedge q)$	*modus tollens*	1, 8
(10)	$\neg p \vee \neg q$	De Morgan	9

Exemplo 9: testar a validade do argumento seguinte.

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s), t \rightarrow u, u \rightarrow v, \neg(q \wedge v) \vdash \neg(p \wedge t) \tag{5.12}$$

Solução: nesse caso, teríamos uma tabela-verdade com 128 linhas. Novamente, verificaremos a validade do argumento através de regras de inferência. Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$	premissa	
(2)	$t \rightarrow u$	premissa	
(3)	$u \rightarrow v$	premissa	
(4)	$\neg(q \wedge v)$	premissa	
(5)	$t \rightarrow v$	silogismo hipotético	$2, 3$
(6)	$p \rightarrow q$	simplificação	1
(7)	$\neg q \vee \neg v$	De Morgan	4
(8)	$\neg p \vee \neg t$	dilema destrutivo	$5, 6, 7$
(9)	$\neg(p \wedge q)$	De Morgan	8

O exemplo a seguir foi originalmente descrito em Nicoletti (2009).

Exemplo 10: considere o argumento seguinte.

Se as uvas caem, então, a raposa as come.

Se a raposa as come, então, estão maduras.

As uvas estão verdes ou caem.

Logo, a raposa come as uvas se e somente se as uvas caem.

Identificando as proposições atômicas nas sentenças em linguagem natural escritas neste exemplo, tem-se:

p : as uvas caem

q : a raposa come as uvas

r : as uvas estão maduras

Reescrevendo na linguagem da lógica proposicional, temos o seguinte argumento:

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash p \leftrightarrow q \tag{5.13}$$

Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$q \rightarrow r$	premissa	
(3)	$\neg r \vee p$	premissa	
(4)	$r \rightarrow p$	equivalência lógica	3
(5)	$q \rightarrow p$	silogismo hipotético	$2, 4$
(6)	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	conjunção	$1, 5$
(7)	$p \leftrightarrow q$	introdução da equivalência	6

5.7 Conclusões

Esta unidade apresentou o conceito de argumento válido, bem como duas abordagens distintas de se verificar a validade de argumentos em geral: a primeira, baseada na construção de tabelas-verdade, e a segunda, mais geral e eficiente (pois é viável mesmo quando o número de proposições atômicas cresce), através da utilização de um conjunto pré-estabelecido de regras de inferência, o que é essencialmente o cálculo proposicional. Também vimos como o cálculo proposicional pode ser aplicado em sentenças da linguagem natural, permitindo a derivação de conclusões várias vezes não intuitivas. Na próxima unidade será introduzido o conceito de prova formal, que será empregado em conjunto com técnicas dedutivas para a demonstração da validade de argumentos, bem como de teoremas.

5.8 Estudos complementares

Para um tratamento mais formal e aprofundado do assunto apresentado, os leitores interessados podem consultar Souza (2008), Hilbert & Ackermann (1999) e Rautemberg (2010).

5.9 Exercícios

1) Verificar, mediante tabela-verdade, a validade dos argumentos:

a) $p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q \vdash r \rightarrow \neg p$

b) $p \rightarrow \neg q, r \rightarrow p, q \vdash \neg r$

c) $p \rightarrow q, r \vee \neg q, \neg r \vdash \neg p$

d) $p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vdash p \rightarrow r$

e) $p \rightarrow \neg q, p, \neg q \rightarrow r \vdash r$

f) $p \wedge \neg q, \neg r \rightarrow q \vdash p \wedge q$

g) $p \vee (q \vee r), \neg p, \neg r \vdash q$

h) $p \vee \neg q, \neg p, \neg(p \wedge r) \rightarrow q \vdash r$

2) Utilizando tabelas-verdade, mostre a validade dos argumentos:

a) $p \rightarrow \neg q, q, \neg p \rightarrow (r \wedge s) \vdash r \wedge s$

b) $p \rightarrow (q \wedge r), \neg(q \wedge r), \neg p \rightarrow s \vdash \neg p \wedge s$

c) $p \vee q, q \rightarrow r, \neg r \vee s \vdash s$

d) $(p \wedge q) \rightarrow r, s \rightarrow (p \wedge q), s \vdash q \vee r$

e) $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s \vdash r \wedge (p \vee q)$

3) Verificar, mediante regras de inferência, a validade dos argumentos:

a) $p \wedge \neg q, q \vee \neg r, s \rightarrow r \vdash p \wedge \neg s$

b) $p \vee \neg q, \neg q \to r, p \to s, \neg r \vdash s$

c) $p \to q, q \to \neg r, r, p \vee (s \wedge t) \vdash s$

d) $p \vee q, q \to r, p \to s, \neg s \vdash r \wedge (p \vee q)$

e) $\neg p \vee \neg q, \neg q \to \neg r, \neg p \to t, \neg t \vdash \neg r \wedge \neg t$

f) $p \to \neg q, p \vee r, r \to \neg q, s \to q, t \vdash \neg s \wedge t$

g) $\neg p \to q, q \to (r \wedge s), p \to t, \neg t \vdash s$

h) $p \to q, \neg q \wedge \neg r, \neg r \to s \vdash \neg p \wedge s$

i) $p \to q, p \vee r, \neg r \vdash q \vee s$

j) $p \to q, q \to r, (p \to r) \to \neg s, s \vee t \vdash t$

k) $p \vee \neg q, \neg r, p \to r, \neg q \to s \vdash s$

l) $r \to t, s \to q, (t \vee q) \to \neg p, r \vee s \vdash \neg p$

m) $p \to \neg q, \neg q \to \neg s, (p \to \neg s) \to \neg t, r \to t \vdash \neg r$

n) $(p \vee q) \to \neg r, s \to p, t \to q, s \vee t \vdash u \vee \neg r$

4) Utilize as regras de inferência para verificar a validade dos argumentos:

a) $(p \vee q) \to \neg r, p, s \to r \vdash \neg s$

b) $p \wedge (q \vee r), (q \vee r) \to \neg s, s \vee t \vdash t$

c) $(p \vee q) \to \neg r, q, (s \wedge t) \to r \vdash \neg(s \wedge t)$

d) $p \to q, \neg q, (\neg p \vee \neg r) \to s \vdash s$

e) $p \vee (q \wedge r), q \to s, r \to t, (s \wedge t) \to (p \vee r), \neg p \vdash r$

f) $q \vee (r \to t), q \to s, \neg s \to (t \to p), \neg s \vdash r \to p$

g) $(p \vee q) \to (p \to (s \wedge t)), p \wedge r \vdash t \vee u$

5) Para cada um dos itens a seguir, identifique os átomos, construa o argumento e verifique sua validade.

a) Se Deus existe, então, a vida tem significado.

Deus existe.

Portanto, a vida tem significado.

b) Deus não existe.

Se Deus existisse, a vida teria significado.

Portanto, a vida não tem significado.

c) Se hoje for quinta-feira, então, amanhã será sexta-feira.

Se amanhã for sexta, então, depois de amanhã será sábado.

Portanto, se hoje for quinta, então, depois de amanhã será sábado.

d) Hoje é um fim de semana se e somente se hoje for sábado ou domingo.

Hoje não é sábado.

Hoje não é domingo.

Portanto, hoje não é um fim de semana.

e) Ela não está em casa ou não está atendendo ao telefone.

Mas se ela não está em casa, então, ela foi sequestrada.

Se ela não atende ao telefone, então, ela está correndo perigo.

Portanto, ela foi sequestrada ou ela está correndo perigo.

6) Considere as seguintes premissas:

Se o universo é finito, então, a vida é curta.

Se a vida vale a pena, então, a vida é complexa.

Se a vida é curta ou complexa, então, a vida tem sentido.

A vida não tem sentido.

Verifique, via regras de inferência, a validade dos seguintes argumentos:

a) A vida não é curta.

b) A vida não é complexa ou o universo não é finito.

c) Se o universo é finito e a vida vale a pena, então a vida tem sentido.

d) A vida vale a pena se e somente se a vida tem sentido.

e) O universo não é finito e a vida não vale a pena.

5.10 Referências

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of Mathematical Logic*. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1999.

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

RAUTENBERG, W. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. 3. ed. Berlin: Springer, 2010.

SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

5.11 Referências consultadas

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

GUIMARÃES, J. O. *Introdução à Lógica Matemática*. Disponível em: <http://www2.dc.ufscar.br/~jose/courses/09-1/LC/Logica para Computacao.pdf>. Acesso em: 15 out. 2011.

UNIDADE 6

Técnicas dedutivas

6.1 Primeiras palavras

O conceito de prova formal é fundamental dentro das ciências exatas, particularmente da matemática, pois define um procedimento rigoroso e sistemático para a prova de teoremas e deduções de consequências lógicas válidas. Vimos na unidade anterior como verificar a validade de argumentos através de regras de inferência. Nesta unidade apresentaremos técnicas para a dedução de conclusões lógicas válidas a partir de um conjunto de premissas. A principal diferença entre o que estudaremos aqui e o que foi visto na unidade anterior é o foco da discussão: neste momento damos um passo além, pois estamos mais preocupados em estudar maneiras de provar ou deduzir uma proposição a partir de um conjunto de premissas do que em simplesmente testar sua validade. É importante notar que apesar de similares, cada um dos problemas possui suas particularidades e relevâncias.

6.2 Problematizando o tema

Em termos práticos, o que esta unidade apresenta pode ser resumido como sendo a resposta para a seguinte pergunta, que nesse momento parece natural: existe mais de uma maneira de provar que uma proposição é conclusão lógica de um conjunto de premissas? Se sim, quais são elas? Responder a essa questão é justamente o principal objetivo desta unidade.

Veremos que através de resultados importantes como o teorema da dedução, diversas estratégias de prova podem ser adotadas como técnicas dedutivas. Enfatizaremos três abordagens principais: a prova direta, a prova condicional e a prova indireta (ou por redução ao absurdo). Antes, porém, será necessária a definição de alguns conceitos básicos como prova formal e o próprio teorema da dedução.

6.3 Prova direta

Um conceito importante dentro da lógica matemática que formalizaremos agora é o conceito de dedução (ou prova) de uma proposição lógica Q a partir de um conjunto de premissas $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. A definição a seguir foi extraída de Nicoletti (2009).

Definição 6.1: considere que $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ e Q são fórmulas válidas da lógica proposicional. Dizemos que uma *dedução* (ou prova) de Q a partir de $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ (consideradas aqui como premissas) é uma sequência finita de proposições $C_1, C_2, \ldots, C_k$ se e somente se $C_k \equiv Q$ (a última proposição derivada é Q) e:

- cada C_i diferente de $C_k \equiv Q$ for uma premissa P_j, $1 \leq j \leq n$ ou
- cada C_i que não é uma premissa for derivada das fórmulas anteriores pela utilização de uma regra de inferência ou
- cada C_i que não é uma premissa for obtida pela substituição de um fórmula anterior por outra logicamente equivalente.

Dizemos, então, que Q é dedutível a partir de $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, ou ainda que Q é um teorema e a sequência $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$ é sua demonstração. Em outras palavras, a proposição Q é um teorema se é uma consequência lógica de um conjunto de premissas, ou em outras palavras, $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash Q$ é um argumento válido. Em matemática, teorias são definidas com base em axiomas (conjuntos de premissas), de modo que toda consequência lógica desses axiomas são teoremas válidos dessa teoria, passíveis de serem demonstrados pelas técnicas dedutivas que estudaremos nesta unidade: prova direta, condicional e por absurdo. Convém ressaltar, no entanto, que algumas proposições (teoremas) podem ser provadas sem premissas, através da introdução de hipóteses que são descartadas pela introdução da condicional, como veremos com maiores detalhes mais adiante.

Outro detalhe importante em deduções são as equivalências. Na prática, toda equivalência pode ser tratada como uma regra de inferência que permite substituir qualquer proposição (premissa ou proposição derivada anteriormente) por uma que seja logicamente equivalente. A seguir apresentaremos uma série de exemplos retirados de Daghlian (2009), Alencar Filho (2002) e Nicoletti (2009).

Exemplo 1: provar $\neg s$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & t \\ (2) & t \to \neg q \\ (3) & \neg q \to \neg s \end{array}$$

Solução:

A dedução de $\neg s$ é dada pela sequência de passos abaixo, que mostram que o argumento $t, t \to \neg q, \neg q \to \neg s \vdash \neg s$ é válido.

(1)	t	premissa	
(2)	$t \to \neg q$	premissa	
(3)	$\neg q \to \neg s$	premissa	
(4)	$\neg q$	*modus ponens*	$1, 2$
(5)	$\neg s$	*modus ponens*	$3, 4$

Exemplo 2: provar $r \vee \neg s$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & s \wedge q \\ (2) & t \to \neg q \\ (3) & \neg t \to r \end{array}$$

Solução:

Para demonstrar $r \vee \neg s$ a partir do conjunto de premissas, temos que mostrar a validade do argumento $s \wedge q, t \to \neg q, \neg t \to r \vdash r \vee \neg s$. Isso é feito através da seguinte dedução:

(1)	$s \wedge q$	premissa	
(2)	$t \rightarrow \neg q$	premissa	
(3)	$\neg t \rightarrow r$	premissa	
(4)	q	simplificação	1
(5)	$\neg(\neg q)$	dupla negação	4
(6)	$\neg t$	*modus tollens*	$2, 5$
(7)	r	*modus ponens*	$3, 6$
(8)	$r \vee \neg s$	adição	7

Exemplo 3: provar que $a = 0$, dadas as premissas seguintes.

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{Se } a \neq 0, \text{ então, } a = b \\ (2) & \text{Se } a = b, \text{ então, } a = c \\ (3) & a \neq c \end{array}$$

Solução:

Para demonstrar que $a = 0$ a partir do conjunto de premissas, por razões de conveniencia, vamos inicialmente escrever as premissas na linguagem da lógica proposicional. Denotando de a a premissa $a = 0$, de b a premissa $a = b$ e de c a premissa $a = c$, nosso problema reduz-se a provar a, dadas as premissas:

$$\begin{array}{ll} (1) & \neg a \rightarrow b \\ (2) & b \rightarrow c \\ (3) & \neg c \end{array}$$

Isso é feito através da seguinte dedução:

(1)	$\neg a \to b$	premissa	
(2)	$b \to c$	premissa	
(3)	$\neg c$	premissa	
(4)	$\neg b$	*modus tollens*	$2, 3$
(5)	$\neg(\neg a)$	*modus tollens*	$1, 4$
(6)	a	dupla negação	5

Exemplo 4: provar a, dadas as premissas,

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \neg a \to c \\
(2) & c \to \neg m \\
(3) & m \vee r \\
(4) & \neg r
\end{array}
$$

Solução:

Para demonstrar a a partir do conjunto de premissas, basta mostrar a validade do argumento $\neg a \to c, c \to \neg m, m \vee r, \neg r \vdash a$. Isso pode ser feito através da seguinte dedução:

(1)	$\neg a \to c$	premissa	
(2)	$c \to \neg m$	premissa	
(3)	$m \vee r$	premissa	
(4)	$\neg r$	premissa	
(5)	m	silogismo disjuntivo	$3, 4$
(6)	$\neg(\neg m)$	dupla negação	5
(7)	$\neg c$	*modus tollens*	$2, 6$
(8)	$\neg(\neg a)$	*modus tollens*	$1, 6$
(9)	a	dupla negação	8

Exemplo 5: prove a validade do argumento seguinte.

Gabriel estuda ou não está cansado.

Se Gabriel estuda, então dorme tarde.

Gabriel não dorme tarde ou está cansado.

Portanto, Gabriel está cansado se e somente se estuda.

Solução:

Reescrevendo as sentenças na linguagem da lógica proposicional, temos:

p: Gabriel estuda

q: Gabriel está cansado

r: Gabriel dorme tarde

Assim, o problema consiste em provar $p \leftrightarrow q$ a partir das premissas:

$$\begin{array}{ll} (1) & p \vee \neg q \\ (2) & p \rightarrow r \\ (3) & \neg r \vee q \end{array}$$

Para isso, basta mostrar que o argumento $p \vee \neg q, p \rightarrow r, \neg r \vee q \vdash p \leftrightarrow q$ é válido, conforme indica a dedução a seguir.

(1)	$p \vee \neg q$	premissa	
(2)	$p \rightarrow r$	premissa	
(3)	$\neg r \vee q$	premissa	
(4)	$q \rightarrow p$	equivalência lógica	1
(5)	$r \rightarrow q$	equivalência lógica	3
(6)	$p \rightarrow q$	silogismo hipotético	2, 5
(7)	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	conjunção	4, 6
(8)	$p \leftrightarrow q$	introdução da equivalência	7

Exemplo 6: provar r, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & p \vee (q \wedge r) \\ (2) & p \rightarrow s \\ (3) & s \rightarrow r \end{array}$$

Solução:

Para demonstrar r a partir do conjunto de premissas, devemos verificar a validade do argumento $p \vee (q \wedge r), p \rightarrow s, s \rightarrow r \vdash r$. Neste caso, será necessário utilizar algumas identidades da álgebra proposicional durante a dedução da conclusão.

(1)	$p \vee (q \wedge r)$	premissa	
(2)	$p \rightarrow s$	premissa	
(3)	$s \rightarrow r$	premissa	
(4)	$p \rightarrow r$	silogismo hipotético	$2, 3$
(5)	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distributiva	1
(6)	$p \vee r$	simplificação	5
(7)	$r \vee p$	comutativa	6
(8)	$\neg(\neg r) \vee p$	dupla negação	7
(9)	$\neg r \rightarrow p$	equivalência lógica	8
(10)	$\neg r \rightarrow r$	silogismo hipotético	$4, 9$
(11)	$\neg(\neg r) \vee r$	equivalência lógica	10
(12)	$r \vee r$	dupla negação	11
(13)	r	identidade	12

Exemplo 7: provar $\neg p \wedge \neg r$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{cc} (1) & p \rightarrow q \\ (2) & r \rightarrow s \\ (3) & (q \vee s) \rightarrow \neg t \\ (4) & t \end{array}$$

Solução:

Da mesma forma que o caso anterior, para demonstrar $\neg p \wedge \neg r$ a partir do conjunto de premissas, devemos testar a validade do argumento $p \rightarrow q, r \rightarrow s, (q \vee s) \rightarrow \neg t, t \vdash \neg p \wedge \neg r$. Neste caso, também será necessário utilizar algumas identidades da álgebra proposicional durante a dedução da conclusão. Uma dica válida para provar proposições nas quais há o concetivo $\wedge$ é mostrar cada uma das componentes e no final utilizar a regra da conjunção para formar a conclusão.

(1)	$p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$r \rightarrow s$	premissa	
(3)	$(q \vee s) \rightarrow \neg t$	premissa	
(4)	t	premissa	
(5)	$\neg(\neg t)$	dupla negação	4
(6)	$\neg(q \vee s)$	*modus tollens*	3, 5
(7)	$\neg q \wedge \neg s$	De Morgan	6
(8)	$\neg q$	simplificação	7
(9)	$\neg s$	simplificação	7
(10)	$\neg p$	*modus tollens*	1, 8
(11)	$\neg r$	*modus tollens*	2, 9
(12)	$\neg p \wedge \neg r$	conjunção	10, 11

6.3.1 Inconsistência

Denomina-se conjunto inconsistente de proposições todo conjunto de duas ou mais proposições que não podem ser simultaneamente verdadeiras. No caso de um argumento, ele é inconsistente se as suas premissas não podem ser simultaneamente verdadeiras, ou seja, ao se construir a tabela-verdade dessas proposições, não existe sequer uma linha na qual as proposições assumam valor lógico V ao mesmo tempo. Por exemplo, considere as proposições $\neg(p \vee \neg q), p \vee \neg r, q \rightarrow r$. Observando as tabelas-verdade das três proposições, verificamos que em cada linha pelo menos uma delas assume valor lógico F, ou seja, não existe uma só linha na qual todas as proposições admitam valor lógico V ao mesmo tempo. Note que, observando apenas as últimas três colunas da tabela-verdade (referentes a cada uma das proposições) não há uma linha sequer na qual isso ocorre. Essa condição determina que o conjunto de proposições em questão é inconsistente.

						$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$(p \vee \neg q)$	$\neg(p \vee \neg q)$	$(p \vee \neg r)$	$q \rightarrow r$
V	V	V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V

Outra maneira de demonstrar que um conjunto de proposições é inconsistente é através das regras de inferência. Se a partir do conjunto de proposições for possível deduzir uma contradição qualquer, como por exemplo, $p \wedge \neg p$, elas são inconsistentes (a contradição que se obtém prova que as proposições não podem ser conjuntamente verdadeiras). Utilizando as três proposições anteriores como premissas, podemos mostrar que o conjunto em questão é inconsistente pela seguinte prova:

(1)	$\neg(p \vee \neg q)$	premissa	
(2)	$p \vee \neg r$	premissa	
(3)	$q \to r$	premissa	
(4)	$\neg p \wedge \neg(\neg q)$	De Morgan	1
(5)	$\neg p \wedge q$	dupla negação	4
(6)	q	simplificação	5
(7)	r	*modus ponens*	3, 6
(8)	$\neg p$	simplificação	5
(9)	$\neg r$	silogismo disjuntivo	2, 8
(10)	$r \wedge \neg r$	conjunção	7, 9

Como foi possível concluir uma contradição ($r \wedge \neg r$), o conjunto de proposições em questão é inconsistente. Veremos a seguir outro exemplo.

Exemplo 8: demonstrar, via regras de inferência, que o conjunto de proposições abaixo é inconsistente.

$$\neg p \vee \neg q, p \wedge s, \neg s \vee r, r \to (r \wedge q) \tag{6.1}$$

Solução:

Do conjunto dado podemos deduzir a contradição $q \wedge \neg q$, conforme ilustra a derivação a seguir. Portanto, o conjunto de proposições é inconsistente.

(1)	$\neg p \vee \neg q$	premissa	
(2)	$p \wedge s$	premissa	
(3)	$\neg s \vee r$	premissa	
(4)	$r \rightarrow (r \wedge q)$	premissa	
(5)	p	simplificação	2
(6)	s	simplificação	2
(7)	$\neg q$	silogismo disjuntivo	$1, 5$
(8)	r	silogismo disjuntivo	$3, 6$
(9)	$r \wedge q$	*modus ponens*	$4, 8$
(10)	q	simplificação	9
(11)	$q \wedge \neg q$	conjunção	$7, 10$

6.4 Prova condicional

Suponha que se deseje provar $p \rightarrow q$ dadas as premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Como já vimos anteriormente, esse problema consiste em mostrar que é válido o argumento $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash p \rightarrow q$ ou, em outras palavras, que $p \rightarrow q$ é consequência lógica de $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, ou seja, que $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é uma tautologia. Veremos agora que uma maneira mais geral de provar uma condicional é colocar seu antecedente como hipótese e inferir logicamente seu consequente. Tal resultado é formalizado pelo teorema da dedução, que será enunciado a seguir.

Para entender esse resultado, utilizaremos a definição de consequência lógica e a equivalência $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, de acordo com a definição encontrada em Daghlian (2009). Partindo da tautologia $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (p \rightarrow q)$ e aplicando a equivalência da condicional, temos que:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee (p \rightarrow q) \quad (6.2)$$

Eliminando a condicional interna através da mesma equivalência, temos:

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee (p \rightarrow q) \equiv \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee (\neg p \vee q) \quad (6.3)$$

Através da propriedade associativa da álgebra proposicional segue que:

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee (\neg p \vee q) \equiv (\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee \neg p) \vee q \quad (6.4)$$

Aplicando a Lei de De Morgan temos:

$$(\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee \neg p) \vee q \equiv \neg((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge p) \vee q \quad (6.5)$$

Por fim, utilizando novamente a equivalência da condicional, chega-se à:

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge p) \rightarrow q \quad (6.6)$$

Isso demonstra que, se $((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge p) \rightarrow q$ for uma tautologia, o que significa dizer que q é consequência lógica de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge p$ ou, em outras palavras, $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge p \models q$ (é possível deduzir q de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge p$), também será uma tautologia a proposição equivalente $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (p \rightarrow q)$. Portanto, $p \rightarrow q$ é dedutível das premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ (pois $p \rightarrow q$ é consequência lógica das premissas).

Em resumo, a essência da prova condicional é a seguinte: para provar uma conclusão que tem a forma condicional, como, por exemplo $p \rightarrow q$, a partir de um conjunto de premissas, devemos introduzir o antecedente p como *premissa provisória* (ou hipótese), deduzir q utilizando p se necessário e, no final, descartar p, significando que a hipótese não é mais necessariamente verdade, construindo $p \to q$. Esse resultado é formalizado pelo teorema a seguir.

Teorema da dedução: sejam p e q duas fórmulas bem-formadas (proposições válidas) e $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ um conjunto de premissas. Então, as proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, p$ implicam logicamente q se e somente se as proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ implicarem logicamente $p \to q$, ou seja:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, p \models q \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \models p \to q \tag{6.7}$$

Veremos a seguir uma série de exemplos adaptados de Nicoletti (2009), Daghlian (2009) e Alencar Filho (2002).

Exemplo 9: provar $p \to r$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & p \to q \\ (2) & q \to r \end{array}$$

Solução:

Como a conclusão a ser deduzida é da forma condicional, devemos invocar o resultado do teorema da dedução e incluir o antecedente p como hipótese (premissa provisória). Note que a solução para esse exemplo consiste em mostrar a validade da regra silogismo hipotético.

(1)	$p \to q$	premissa.	
(2)	$q \to r$	premissa	
(3)	p	hipótese	
(5)	q	*modus ponens*	$1, 3$
(6)	r	*modus ponens*	$2, 5$
(7)	$p \to r$	eliminação da hipótese	$3, 6$

Devemos atentar-nos para o último passo da prova condicional. Como o antecedente p foi incluído como hipótese e conseguimos inferir logicamente o consequente r, com base no teorema da dedução isso é equivalente a provar que $p \rightarrow r$. Nesse exemplo, a aplicação da prova condicional se deu efetivamente nos passos (3) e (7), nos quais p foi incluído como hipótese e eliminado após a dedução de q, respectivamente.

Exemplo 10: mostrar que o argumento $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$ é válido.

Solução:

Esse exemplo mostra um caso em que temos uma única premissa e a conclusão a ser deduzida é uma condicional que tem como consequente outra condicional. O antecedente da condicional mais externa, p, é assumido como hipótese. Porém, como o consequente dessa condicional é uma outra condicional, o antecedente dessa condicional mais interna também pode ser assumido como uma nova hipótese, fazendo com que tenhamos duas premissas provisórias, conforme indica a derivação a seguir.

(1)	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa	
(2)	p	hipótese	
(3)	q	hipótese	
(4)	$p \wedge q$	conjunção	$2, 3$
(5)	r	*modus ponens*	$1, 4$
(6)	$q \rightarrow r$	eliminação da hipótese	$3, 5$
(7)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	eliminação da hipótese	$2, 6$

Note que nesse caso, como foram introduzidas duas hipóteses, ao final temos que as eliminar no inverso da ordem em que foram inseridas, ou seja, a premissa provisória q foi inserida depois de p, mas deve ser eliminada primeiro para que possa ser construído o consequente da condicional mais externa da conclusão, $(q \rightarrow r)$.

Exemplo 11: provar $c \to \neg d$, dadas as premissas,

$$
\begin{array}{ll}
(1) & b \to \neg c \\
(2) & \neg(d \wedge \neg b)
\end{array}
$$

Solução:

Mais um caso em que devemos utilizar o resultado do teorema da dedução, pois a conclusão é da forma condicional.

(1)	$b \to \neg c$	premissa	
(2)	$\neg(d \wedge \neg b)$	premissa	
(3)	c	hipótese	
(4)	$\neg(\neg c)$	dupla negação	3
(5)	$\neg b$	*modus tollens*	1, 4
(6)	$\neg d \vee \neg(\neg b)$	De Morgan	2
(7)	$\neg d$	silogismo disjuntivo	5, 6
(8)	$c \to \neg d$	eliminação da hipótese	3, 7

Exemplo 12: provar $a \to b$, dadas as premissas,

$$
\begin{array}{ll}
(1) & (a \vee j) \to g \\
(2) & j \to (\neg g \wedge \neg h) \\
(3) & j \vee b
\end{array}
$$

Solução:

Outro caso em que devemos utilizar o resultado do teorema da dedução, pois a conclusão é da forma condicional.

(1)	$(a \vee j) \to g$	premissa	
(2)	$j \to (\neg g \wedge \neg h)$	premissa	
(3)	$j \vee b$	premissa	
(4)	a	hipótese	
(5)	$a \vee j$	adição	4
(6)	g	*modus ponens*	$1, 5$
(7)	$j \to \neg(g \vee h)$	De Morgan	2
(8)	$g \vee h$	adição	6
(9)	$\neg(\neg(g \vee h))$	dupla negação	8
(10)	$\neg j$	*modus tollens*	$7, 9$
(11)	b	silogismo disjuntivo	$3, 10$
(12)	$a \to b$	eliminação da hipótese	$4, 11$

O exemplo a seguir, adaptado de Nicoletti (2009) e Nolt & Rohatyn (1991), é interessante para discutir uma aplicação mais concreta da prova condicional utilizando linguagem natural.

Exemplo 13: suponha que um corredor machucou seu tornozelo uma semana antes de uma grande corrida e a sua intenção seja persuadí-lo a parar de correr por alguns dias, a fim de que seu tornozelo sare. Você pode alertá-lo fazendo a seguinte afirmação condicional: *se você continuar a correr, não estará apto a disputar a corrida*. A resposta do corredor eventualmente pode ser: *Prove isso!*

Para fazer isso, você pode elaborar seu argumento com base em três suposições:

a. seu tornozelo está muito inchado;

b. se seu tornozelo está muito inchado e você continuar a correr, então, seu tornozelo não irá sarar em uma semana;

c. se seu tornozelo não sarar em uma semana, então, você não estará apto a disputar a corrida.

Assim, você pode provar a afirmação *se você continuar a correr, então você não estará apto a disputar a corrida* utilizando o resultado do teorema da dedução, adicionando como hipótese o antecendente da conclusão.

É fato que a correção do argumento depende da veracidade das suposições (premissas). Na vida real, a veracidade delas pode ser duvidosa. Entretanto, o ponto importante aqui é que a correção do argumento não depende da veracidade da hipótese. Considerando as premissas (sentenças de a a c) e independentemente do corredor continuar a correr ou não (hipótese), deve ser verdade que se ele continuar correndo, não estará apto a disputar a corrida. A hipótese é adicionada somente para mostrar que, dadas as suposições, ela implica a conclusão. Uma vez provado isso, a hipótese é descartada e a expressão condicional que representa a conclusão é estabelecida somente com base nas premissas (suposições). Escrevendo na linguagem da lógica proposicional, temos:

p: seu tornozelo está muito inchado

q: você continua a correr

r: seu tornozelo irá sarar em uma semana

s: você está apto a disputar a corrida

Isso permite formalizar o seguinte argumento:

$$p, (p \wedge q) \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow \neg s \vdash q \rightarrow \neg s \tag{6.8}$$

Utilizando a prova condicional, podemos inferir logicamente a conclusão desejada, provando a afirmação, o que demonstra a validade do argumento.

(1)	p	premissa	
(2)	$(p \wedge q) \rightarrow \neg r$	premissa	
(3)	$\neg r \rightarrow \neg s$	premissa	
(4)	q	hipótese	
(5)	$p \wedge q$	conjunção	$1, 4$
(6)	$\neg r$	*modus ponens*	$2, 5$
(7)	$\neg s$	*modus ponens*	$3, 6$
(8)	$q \rightarrow \neg s$	eliminação da hipótese	$4, 7$

Outra observação interessante sobre a prova condicional é o fato de algumas proposições válidas (fórmulas bem-formadas) serem passíveis de demonstração sem nenhuma premissa. O exemplo a seguir, extraído de Nicoletti (2010), ilustra uma situação em que isso ocorre.

Exemplo 14: verifique que o argumento $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$ é válido.

Solução:

Note que nesse caso não há nenhuma premissa. Assim, de acordo com a prova condicional, devemos iniciar a prova incluindo o antecedente da conclusão como hipótese.

(1)	p	hipótese	
(2)	$p \vee q$	adição	1
(3)	$p \rightarrow (p \vee q)$	eliminação da hipótese	$1, 2$

6.5 Prova por redução ao absurdo

Outro método frequentemente empregado para a dedução de uma conclusão lógica é a prova indireta, também conhecida como prova por redução ao absurdo. Essa abordagem baseia-se no princípio de que a partir de uma contradição, pode-se deduzir qualquer proposição.

Suponha que se deseja provar q dadas as premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Para isso, basta mostrar que o argumento $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n \vdash q$ é válido, isto é, $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma tautologia. Considerando que o argumento seja válido (q é dedutível das premissas) e utilizando as leis de idempotência, dupla negação e equivalência da condicional, temos:

$$q \equiv q \vee q \equiv \neg(\neg q) \vee q \equiv \neg q \rightarrow q \tag{6.9}$$

Dessa forma, então, a proposição a seguir também é uma tautologia:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (\neg q \rightarrow q) \tag{6.10}$$

Pelo teorema da dedução, temos que a inclusão do antecedente da conclusão $\neg q$ como hipótese permite deduzir q, ou seja, $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n, \neg q \vdash q$ também é um argumento válido, o que implica dizer que $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow q$ também é uma tautologia.

Portanto, se introduzirmos a negação da conclusão $\neg q$ no conjunto de premissas, ainda conseguimos deduzir a conclusão q, gerando assim uma contradição $q \wedge \neg q$. Em resumo, para aplicar a prova por redução ao absurdo, devemos introduzir a negação da conclusão como premissa provisória e deduzir uma contradição. Ao chegar na contradição, provamos a validade do argumento. A seguir veremos alguns exemplos extraídos de Nicoletti (2009), Daghlian (2009) e Alencar Filho (2002) que ilustram o procedimento de prova por redução ao absurdo.

Exemplo 15: provar r por redução ao absurdo, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & \neg p \rightarrow r \\ (2) & \neg r \rightarrow q \\ (3) & \neg(p \wedge q) \end{array}$$

Para demonstrar a conclusão utilizando a prova por redução ao absurdo, o primeiro passo consiste justamente na introdução da negação da conclusão como premissa provisória. A seguir, devemos buscar por uma contradição, muitas vezes através da dedução da própria conclusão.

(1)	$\neg p \to r$	premissa	
(2)	$\neg r \to q$	premissa	
(3)	$\neg(p \wedge q)$	premissa	
(4)	$\neg r$	premissa provisória	
(5)	q	*modus ponens*	2, 4
(6)	$\neg p \vee \neg q$	De Morgan	3
(7)	$\neg(\neg q)$	dupla negação	5
(8)	$\neg p$	silogismo disjuntivo	6, 7
(9)	r	*modus ponens*	1, 8
(10)	$r \wedge \neg r$	conjunção	4, 9

A prova por redução ao absurdo encerra-se quando uma contradição é deduzida (nesse caso a proposição $r \wedge \neg r$). Porém, podemos encontrar uma contradição que não envolve a mesma proposição da premissa provisória. Em outras palavras, a contradição procurada pode ou não envolver a proposição r, como, por exemplo, $p \wedge \neg p$. Veremos isso no próximo exemplo.

Exemplo 16: provar $\neg p$ por redução ao absurdo, dadas as premissas,

(1)	$\neg q \vee r$
(2)	$p \to \neg r$
(3)	q

Solução:

Assim como no caso anterior, devemos introduzir a negação da conclusão como premissa provisória e encontrar uma contradição.

(1)	$\neg q \vee r$	premissa	
(2)	$p \rightarrow \neg r$	premissa	
(3)	q	premissa	
(4)	p	premissa provisória	
(5)	$\neg r$	*modus ponens*	$2, 4$
(6)	$\neg q$	silogismo disjuntivo	$1, 5$
(7)	$q \wedge (\neg q)$	conjunção	$3, 6$
(8)	$\neg p$	redução ao absurdo	$4, 7$

Note que neste caso a contradição encontrada, $q \wedge \neg q$, não envolve p. Por isso, durante a prova, mais precisamente no último passo, invocamos a redução ao absurdo referenciando a premissa provisória (negação da conclusão) e a contradição obtida, para finalmente deduzir a conclusão.

Exemplo 17: verifique, utilizando redução ao absurdo, a validade do argumento $p \leftrightarrow \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$.

Solução:

Ao inserir a negação da conclusão como premissa provisória temos:

(1)	$p \leftrightarrow \neg q$	premissa	
(2)	$p \wedge q$	premissa provisória	
(3)	p	simplificação	2
(4)	q	simplificação	2
(5)	$(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$	equivalência da bicondicional	1
(6)	$(p \rightarrow \neg q)$	simplificação	5
(7)	$\neg q$	*modus ponens*	$3, 6$
(8)	$q \wedge \neg q$	conjunção	$4, 7$
(9)	$\neg(p \wedge q)$	redução ao absurdo	$2, 8$

Exemplo 18: verifique, utilizando redução ao absurdo, a validade do argumento $\neg p \vee q, \neg q, \neg r \rightarrow s, \neg p \rightarrow (s \rightarrow \neg t) \vdash t \rightarrow r$.

Solução:

Note que nesse caso queremos provar por redução ao absurdo uma conclusão na forma condicional. O primeiro passo consiste em aplicar o teorema da dedução para obter o seguinte argumento (com o antecedente da conclusão como hipótese):

$$\neg p \vee q, \neg q, \neg r \rightarrow s, \neg p \rightarrow (s \rightarrow \neg t), t \vdash r \tag{6.11}$$

Agora, introduzindo a negação da conclusão como premissa provisória, temos a seguinte dedução (note que agora adicionamos duas novas premissas ao conjunto original):

(1)	$\neg p \vee q$	premisssa	
(2)	$\neg q$	premissa	
(3)	$\neg r \rightarrow s$	premissa	
(4)	$\neg p \rightarrow (s \rightarrow \neg t)$	premissa	
(5)	t	hipótese	
(6)	$\neg r$	premissa provisória	
(7)	$\neg p$	silogismo disjuntivo	$1, 2$
(8)	$s \rightarrow \neg t$	*modus ponens*	$4, 7$
(9)	s	*modus ponens*	$3, 6$
(10)	$\neg t$	*modus ponens*	$8, 9$
(11)	$t \wedge \neg t$	conjunção	$5, 10$
(12)	r	redução ao absurdo	$6, 11$
(13)	$t \rightarrow r$	eliminação da hipótese	$5, 12$

Convém ressaltar que as premissas provisórias e hipóteses são removidas na ordem inversa em que foram introduzidas.

6.6 Conclusões

Esta Unidade apresentou três importantes técnicas dedutivas para a derivação de conclusões lógicas: a prova direta, a prova condicional, fundamentada no teorema da dedução, e a prova indireta ou por redução ao absurdo. Na prova direta vimos que o procedimento adotado é praticamente o mesmo que utilizamos na unidade anterior para verificar a validade de argumentos. No que se refere a esse tópico, a novidade foi a apresentação de um método que permite verificar a inconsistência de um dado conjunto de premissas. Também vimos que para deduzir uma conclusão na forma condicional, devemos acrescentar o seu antecedente como hipótese e deduzir o consequente, o que é essencialmente a prova condicional. Por fim, vimos que é possível mostrar uma conclusão qualquer introduzindo sua negação como premissa provisória e deduzindo uma contradição, pela definição da prova por redução ao absurdo. Na Unidade 7 estudaremos outra abordagem de inferência lógica conhecida como prova por resolução.

6.7 Estudos complementares

Uma gama de exemplos envolvendo prova direta, prova condicional e prova por redução ao absurdo pode ser encontrada em Nicoletti (2009), Daghlian (2009) e Alencar Filho (2002). Para aqueles interessados em uma abordagem mais formal recomendamos as referências Souza (2008), Silva (2006), Hilbert & Ackermann (1999) e Rautenberg (2010).

6.8 Exercícios

1) Demonstre cada um dos argumentos utilizando prova direta:

a) $p \to \neg q, q, \neg p \to (r \wedge s) \vdash (r \wedge s)$

b) $p \to q, \neg p \to \neg(\neg r), \neg q \vdash r$

c) $r \to (p \vee q), \neg(\neg r), \neg q \vdash p$

d) $\neg p \vee q, \neg q, \neg(q \wedge r) \to p \vdash r$

e) $(r \wedge \neg t) \to \neg s, p \to s, p \wedge q \vdash \neg(\neg t \wedge r)$

f) $(r \wedge s) \vee p, q \to \neg p, t \to \neg p, q \vee t \vdash s \wedge r$

g) $\neg(p \wedge q), \neg q \to r, \neg p \to r, s \to \neg r \vdash \neg s$

h) $r \to \neg p, (r \wedge s) \vee t, t \to (q \vee u), \neg q \wedge \neg u \vdash \neg p$

i) $\neg(p \vee \neg r), p \vee q, r \to s, (q \wedge s) \to (t \wedge s) \vdash s \wedge t$

j) $\neg p \vee q, \neg q \vee r \vdash \neg p \vee r$

k) $p \to q, (p \wedge q) \to (r \vee s), (r \vee s) \to \neg t, (p \to \neg t) \to u \vdash u$

l) $(p \vee q) \to (r \wedge s), \neg r \vdash \neg p$

2) Mostre que os conjuntos de proposições a seguir são inconsistentes deduzindo uma contradição:

a) $r \to p, \neg(q \vee p), q \vee r$

b) $\neg(p \vee q), \neg q \to r, \neg r \vee s, \neg p \to \neg s$

c) $(p \vee s) \to q, q \to \neg r, t \to p, t \wedge r$

3) Utilizando a prova condicional, mostre que os argumentos abaixo são válidos:

a) $(a \vee f) \to g, j \to (\neg g \wedge \neg h), j \vdash a \to h$

b) $\neg r \to q, \neg t, \neg s \to \neg q \vdash (t \vee \neg s) \to r$

c) $s \to r, s \vee p, p \to q, r \to t \vdash \neg q \to t$

d) $(p \wedge q) \to \neg r \vee \neg s, r \wedge s \vdash p \to \neg q$

e) $(p \to q) \vee r, (s \vee t) \to \neg r, s \vee (t \wedge u) \vdash p \to q$

f) $(p \to q) \wedge \neg(r \wedge \neg s), s \to (t \vee u), \neg u \vdash r \to t$

g) $p \vee \neg q, q, r \to \neg s, p \to (\neg s \to t) \vdash \neg t \to \neg r$

4) Utilizando a prova por redução ao absurdo, mostre que os seguintes argumentos são válidos:

a) $\neg(p \wedge q), p \to r, q \vee \neg r \vdash \neg p$

b) $p \to \neg q, r \to \neg p, q \vee r \vdash \neg p$

c) $t \to \neg s, f \to \neg t, s \vee f \vdash \neg t$

d) $s \vee r, s \to \neg e, r \to m \vdash \neg e \vee m$

e) $\neg r \vee \neg b, (t \vee s) \to r, b \vee \neg s, \neg t \vdash \neg(t \vee s)$

f) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg r, \neg r \to \neg p, \neg q \to \neg r \vdash q$

g) $\neg p \vee \neg q, (r \vee s) \to p, q \vee \neg s, \neg r \vdash \neg(r \vee s)$

h) $(p \to q) \vee r, (s \vee t) \to \neg r, s \vee (t \wedge u) \vdash p \to q$

i) $(p \to q) \to r, (r \vee s) \to \neg t, t \vdash \neg q$

j) $(p \to q) \vee (r \wedge s), \neg q \vdash p \to s$

5) Verifique se as assertivas a seguir são válidas, dado que:

Eu faço exercícios regularmente ou eu engordo.

Se chove, então a faz frio.

Se eu engordo ou faz frio, então assisto TV.

Não assisto TV.

a) Eu faço exercícios regularmente.

b) Se não faz frio, então não chove e não engordo.

6.9 Referências

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of Mathematical Logic*. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1999.

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

RAUTENBERG, W. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. 3. ed. Berlin: Springer, 2010.

SILVA, F. S. C.; FINGER, M.; MELO, A. C. V. *Lógica para Computação*. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

6.10 Referências consultadas

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

GUIMARÃES, J. O. *Introdução à Lógica Matemática*. Disponível em: <http://www2.dc.ufscar.br/~jose/courses/09-1/LC/Logica para Computacao.pdf>. Acesso em: 15 out. 2011.

NOLT, J.; ROHATYN, D. *Lógica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

UNIDADE 7

Prova por resolução

7.1 Primeiras palavras

Os métodos de prova discutidos anteriormente são todos baseados em um conjunto de regras de inferência. Apesar de bastante poderosas, as técnicas dedutivas exigem a aplicação de um conjunto relativamente vasto de operações, o que, dependendo da situação, pode ser uma tarefa bastante árdua.

Nesta unidade apresentaremos o conceito de resolução, que juntamente com as definições de forma normal conjuntiva (FNC) e notação clausal, fundamentam a prova por resolução, uma abordagem alternativa, simples e eficiente para inferir logicamente conclusões a partir de um conjunto de premissas. O texto apresentado nesta unidade segue a organização do conteúdo presente em Nicoletti (2009), que aborda o tema em questão de maneira bastante didática.

7.2 Problematizando o tema

A prova por resolução é um procedimento bastante geral, pois é um método sintático de prova fundamentado na utilização de uma simples regra de inferência, o que torna sua aplicação fácil, vantajosa e computacionalmente viável (NICOLETTI, 2009, p. 69).

Em termos práticos, o que esta unidade apresenta é como a prova por resolução pode ser utilizada na demonstração de teoremas e verificação de argumentos. Há o objetivo de responder a perguntas como:

- Qual é a única regra utilizada na prova por resolução?
- Ela pode ser aplicada a qualquer tipo de proposição?
- Quais as suas vantagens em relação às técnicas anteriores?

Veremos, através de resultados importantes, respostas para cada uma das questões levantadas aqui.

7.3 Resolução

A resolução é uma operação que pode ser aplicada somente a um subconjunto restrito de proposições válidas: as fórmulas bem-formadas conhecidas como *cláusulas*. Apenas relembrando, cláusulas são proposições que consistem em uma disjunção de literais, ou seja, em uma disjunção de átomos ou átomos negados.

A regra da resolução deve sempre ser aplicada a um par de cláusulas (*cláusulas-pais*) e produz como resultado uma cláusula derivada, chamada de *resolvente*. Assim, a regra da resolução permite combinar duas clásulas, gerando uma terceira, pela eliminação de átomos complementares. Essa operação é formalizada pela definição abaixo.

Definição 7.1: sejam P e Q duas cláusulas. Se existe um átomo a tal que $a \in P$ e $\neg a \in Q$, então, o resolvente de P e Q com relação ao literal a (ou não a), denotado por *resolvente*$(P, Q; a)$ ou simplesmente *res*$(P, Q; a)$, é a cláusula $(P - \{a\}) \cup (Q - \{\neg a\})$, ou seja, é a cláusula obtida pela união de P e Q, removendo os átomos complementares.

Exemplo: considere as cláusulas $P = \neg p \vee r$ e $Q = q \vee \neg r$. Então, *resolvente*$(P, Q; r) = \neg p \vee q$. Por outro lado, se $R = \neg p \vee q \vee r$ e $S = \neg q \vee \neg r$, então *resolvente*$(R, S; r) = \neg p \vee q \vee \neg q$ e *resolvente*$(R, S; q) = \neg p \vee \neg r \vee r$.

Nesse momento, convém ressaltar a relação entre a regra da resolução definida acima e algumas das regras de inferência. Primeiramente, explicitaremos a equivalência entre a regra modus ponens e a resolução. Sabemos que a regra modus ponens é definida como $p \rightarrow q, p \models q$, pois representa um argumento válido. Utilizando a equivalência da condicional, podemos escrever $P = \neg p \vee q$. Definindo $Q = p$, podemos escrever essa regra, de maneira equivalente, através do conceito de resolvente, como *resolvente*$(P, Q; p)$, que é q.

Analogamente, a regra de inferência modus tollens pode ser reescrita como *resolvente*$(P, Q; q)$, que resulta em $\neg p$. Outra regra que pode ser facilmente expressa dessa maneira é a regra silogismo hipotético. A Tabela a seguir ilustra a equivalência entre a regra da resolução e algumas regras de inferência clássicas (modus ponens, modus tollens e silogismo hipotético).

MP	$p \rightarrow q, p \models q$	$resolvente(\neg p \lor q, p; p) \equiv q$
MT	$p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$	$resolvente(\neg p \lor q, \neg q; q) \equiv \neg p$
SH	$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$	$resolvente(\neg p \lor q, \neg q \lor r; q) \equiv \neg p \lor r$

Com base no que foi visto até aqui, veremos a seguir um resultado importante que fundamenta a prova por resolução. Trata-se do princípio da resolução, definido formalmente pelo seguinte teorema:

Teorema (princípio da resolução para a lógica proposicional): considere duas cláusulas quaisquer P e Q. Seja ainda a um átomo, tal que $a \in P$ e $\neg a \in Q$. Então:

$$P, Q \models resolvente(P, Q; a) \tag{7.1}$$

Isso significa que o argumento acima é válido. Em outras palavras, isso quer dizer que o resolvente de duas cláusulas P e Q é consequência lógica das duas cláusulas.

Portanto, dado um conjunto de premissas, é possível, a partir de sucessivas aplicações da regra da resolução, provar uma conclusão. Isso é justamente o que veremos no restante desta Unidade. Mas antes, para ilustrar a ideia da resolução, apresentaremos um exemplo simples extraído de Nicoletti (2009).

Exemplo 1: nem sempre o conjunto de proposições sobre o qual desejamos aplicar a regra da resolução é composto apenas por cláusulas. Suponha que se deseje aplicar a resolução às cláusulas $P = \neg p \rightarrow q$ e $Q = q \rightarrow r$. Para resolver esse problema, o primeiro passo consiste em reescrever cada proposição inicial na forma normal conjuntiva, definida por uma conjunção de

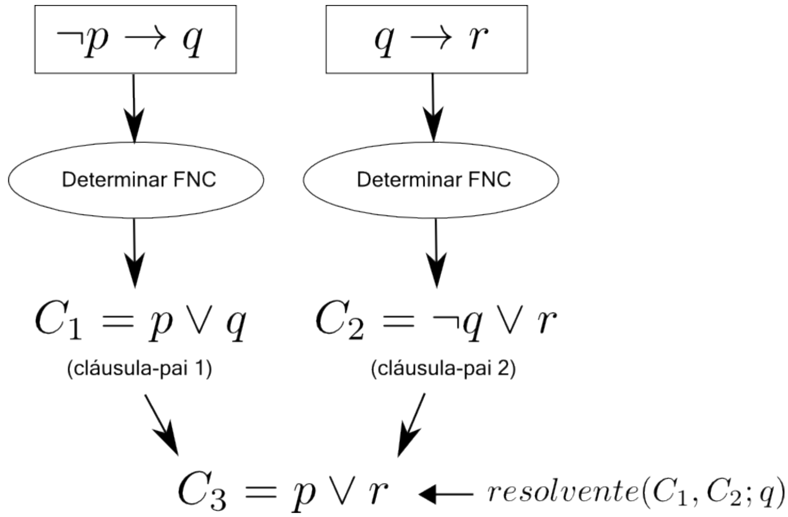

Figura 7.1 Diagrama ilustrativo do processo de resolução.

cláusulas. Assim, para o exemplo em questão, teremos $C_1 = \mathrm{FNC}(P) = p \vee q$ e $C_2 = \mathrm{FNC}(Q) = \neg q \vee r$, de modo que *resolvente*$(C_1, C_2; q)$= $p \vee r$. O diagrama da Figura 7.1, adaptado de Nicoletti (2009), ilustra todo o processo graficamente.

7.4 Prova por resolução

A aplicação da resolução na demonstração de teoremas está diretamente relacionado com a prova por redução ao absurdo, apresentada na unidade 6. Basicamente, existem duas maneiras distintas de mostrar uma conclusão lógica utilizando a prova por resolução:

- através da negação da conclusão;
- através da negação de todo teorema escrito na forma condicional.

A diferença entre cada uma das abordagens ficará mais clara nos exemplos. O método mais usual é o primeiro, uma vez que a negação da conclusão é, na maioria das vezes, mais simples e direta que a negação de todo teorema escrito na forma condicional. O processo de prova por resolução utilizando a primeira abordagem, conforme descrito em Nicoletti (2009), é definido na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 Prova por resolução através da negação da conclusão.

1. Para cada premissa, bem como para a negação da conclusão, encontrar sua FNC.
2. Neste ponto, todas as premissas e a negação da conclusão são conjunções de uma ou várias cláusulas. Identificar e isolar cada cláusula individualmente.
3. Procurar no conjunto de cláusulas por duas delas que contenham o mesmo átomo, de forma que sejam complementares, por exemplo, uma deve conter p e outra $\neg p$. A aplicação da resolução irá eliminar esse átomo das duas cláusulas, gerando uma terceira, que passa a ser uma nova candidata junto às demais. Na prática, as duas cláusulas anteriores transformam-se em uma única, através de uma simples operação de cancelamento.
4. Esse processo descrito no passo 3 deve continuar até que se tenha apenas duas cláusulas, ambas compostas por um único átomo, sendo que uma delas pelo átomo em si e a outra pela sua negação, como, por exemplo, $C_i = p$ e $C_j = \neg p$. Assim, ao se aplicar a resolução nessas duas cláusulas, obtemos a cláusula vazia, denotada aqui por *nil*, o que representa uma contradição, finalizando a prova.

Observando o processo, é fácil notar uma grande analogia entre prova por resolução e a prova por redução ao absurdo. Isso decorre do fato de ambas serem baseadas no mesmo princípio. A grande vantagem da prova por resolução sobre as demais técnicas é que tudo se resume a aplicação de uma única regra, a resolução, o que torna o método fácil de ser aplicado e, inclusive, automatizado. A linguagem de programação Prolog, bastante utilizada em aplicações computacionais na área de Inteligência Artificial, utiliza utiliza esse princípio. Veremos a seguir alguns exemplos ilustrativos do conceito de prova por resolução extraídos de Nicoletti (2009).

Exemplo 1: verifique a validade do argumento seguinte.

$$\neg p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s \vdash p \tag{7.2}$$

a) Via regras de inferência.

b) Via o princípio da resolução, com negação da conclusão.

c) Via o princípio da resolução, com a negação do teorema na forma condicional.

Solução:

a) Para mostrar que o argumento em questão é válido, vamos utilizar a prova direta. A prova é dada pela seguinte dedução:

(1)	$\neg p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$q \rightarrow r$	premissa	
(3)	$\neg r \vee s$	premissa	
(4)	$\neg s$	premissa	
(5)	$\neg r$	silogismo disjuntivo	$3, 4$
(6)	$\neg q \vee r$	equivalência da condicional	2
(7)	$\neg q$	silogismo disjuntivo	$5, 6$
(8)	$p \vee q$	equivalência da condicional	1
(9)	p	silogismo disjuntivo	$7, 8$

b) Neste caso, para provar o argumento utilizando o princípio da resolução, primeiramente devemos encontrar a FNC das premissas e da negação da conclusão, conforme observamos abaixo:

$FNC(\neg p \rightarrow q)$	$\neg p \rightarrow q \equiv \neg(\neg p) \vee q \equiv p \vee q$
$FNC(q \rightarrow r)$	$q \rightarrow r \equiv \neg q \vee r$
$FNC(\neg r \vee s)$	$\neg r \vee s$
$FNC(\neg s)$	$\neg s$
conclusão negada:	$\neg p$
$FNC(\neg p)$	$\neg p$

Assim, temos a seguinte prova por resolução:

Cláusulas		Comentário
(1)	$p \vee q$	cláusula da primeira premissa
(2)	$\neg q \vee r$	cláusula da segunda premissa
(3)	$\neg r \vee s$	cláusula da terceira premissa
(4)	$\neg s$	cláusula da quarta premissa
(5)	$\neg p$	cláusula da negação da conclusão
(6)	q	resolvente da resolução de 1 e 5
(7)	r	resolvente da resolução de 2 e 6
(8)	s	resolvente da resolução de 3 e 7
(9)	nil	resolvente da resolução de 4 e 8

Como chegamos em *nil*, demonstramos que o argumento em questão é válido. A Figura 7.2 ilustra a árvore de refutação correspondente à prova por resolução anterior.

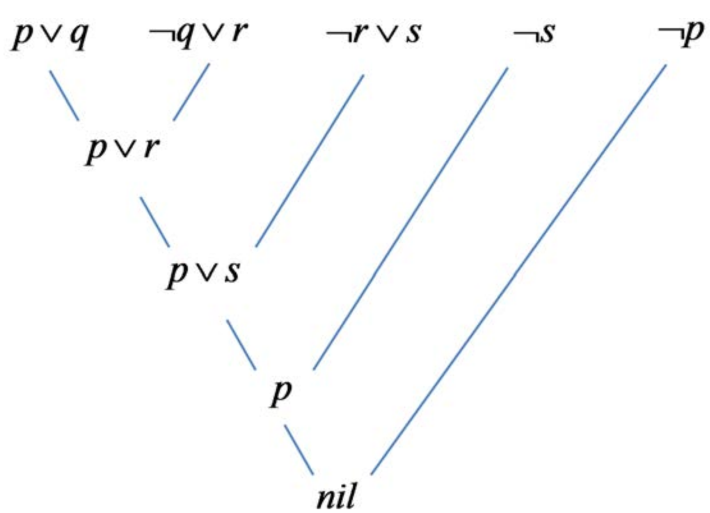

Figura 7.2 Diagrama ilustrativo do processo de resolução.

Uma observação importante é que a prova por resolução não é única, no sentido de que a cláusula vazia *nil* não é obtida unicamente a partir da sequência de operações mostradas neste exemplo. Pode haver outra sequência de operações que levam ao mesmo resultado.

c) Para provar o argumento utilizando o princípio da resolução com a negação de todo teorema, o primeiro passo consiste em escrever o argumento na forma condicional, que é dada por:

$$((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \to p \tag{7.3}$$

A seguir, devemos encontrar a negação da expressão toda, escrevendo a fórmula resultante na FNC. Isso requer a utilização da álgebra proposicional. Aplicando a negação e utilizando a equivalência da condicional, temos:

$$\begin{gathered} \neg(((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \to p) \equiv \\ \neg(\neg((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \vee p) \end{gathered} \tag{7.4}$$

Aplicar a Lei de De Morgan na negação mais externa nos leva à:

$$\begin{gathered} \neg(\neg((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \vee p) \equiv \\ ((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \wedge \neg p \end{gathered} \tag{7.5}$$

E, finalmente, eliminando as condicionais restantes por equivalências lógicas e os parêntesis desnecessários, chegamos à FNC desejada:

$$\begin{gathered} ((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \wedge \neg p \equiv \\ (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s \wedge \neg p \end{gathered} \tag{7.6}$$

Note que as cláusulas obtidas são exatamente iguais às obtidas no item anterior, pela negação da conclusão. Portanto, a partir desse ponto, a prova por resolução será idêntica ao caso anterior.

Exemplo 2: verificar a validade do argumento seguinte.

$$\neg p \rightarrow q, r \rightarrow s, (q \vee s) \rightarrow t, \neg t \vdash \neg p \wedge \neg r \tag{7.7}$$

a) Mediante prova por resolução com negação da conclusão.

b) Mediante prova por resolução com negação do teorema na forma condicional.

Solução:

a) Para a prova por resolução, o primeiro passo consiste na determinação das FNCs das premissas e da negação da conclusão.

$FNC(p \rightarrow q)$	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$FNC(r \rightarrow s)$	$r \rightarrow s \equiv \neg r \vee s$
$FNC((q \vee s) \rightarrow t)$	$(q \vee s) \rightarrow t \equiv$
	$\neg(q \vee s) \vee t \equiv$
	$(\neg q \wedge \neg s) \vee t \equiv$
	$(\neg q \vee t) \wedge (\neg s \vee t)$
$FNC(\neg t)$	$\neg t$
conclusão negada:	$\neg(\neg p \wedge \neg r) \equiv$
	$p \vee r$
$FNC(\neg(\neg p \wedge \neg r))$	$p \vee r$

Identificando e separando as cláusulas, efetuamos a prova por resolução:

Cláusulas		Comentário
(1)	$\neg p \vee q$	cláusula da primeira premissa
(2)	$\neg r \vee s$	cláusula da segunda premissa
(3)	$\neg q \vee t$	cláusula 1 da terceira premissa
(4)	$\neg s \vee t$	cláusula 2 da terceira premissa
(5)	$\neg t$	cláusula da quarta premissa
(6)	$p \vee r$	cláusula da negação da conclusão
(7)	$\neg p \vee t$	resolvente da resolução de 1 e 3
(8)	$\neg p$	resolvente da resolução de 5 e 7
(9)	$\neg s$	resolvente da resolução de 4 e 5
(10)	$\neg r$	resolvente da resolução de 2 e 9
(11)	p	resolvente da resolução de 6 e 10
(12)	nil	resolvente da resolução de 8 e 11

Portanto, o argumento em questão é válido. A representação gráfica em termos da árvore de refutação é mostrada na Figura 7.3.

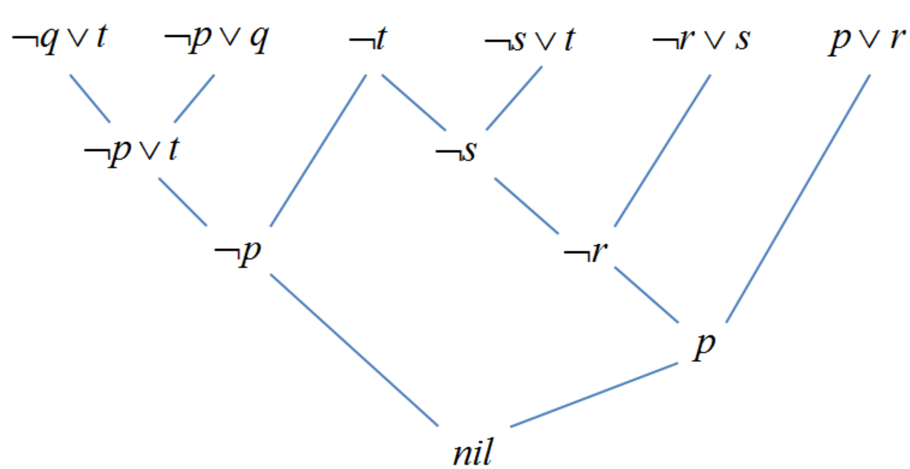

Figura 7.3 Diagrama ilustrativo do processo de resolução.

b) Na prova por resolução com negação de todo teorema, o primeiro passo consiste em escrevê-lo na forma condicional, o que nos fornece:

$$((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \to (\neg p \land \neg r) \tag{7.8}$$

Em seguida, devemos negar toda a sentença e escrever o resultado da negação na FNC. Note que esse procedimento deve produzir exatamente o conjunto de cláusulas obtido pela negação da conclusão.

Aplicando a negação na forma condicional e utilizando a equivalência da condicional, temos:

$$\begin{gathered} \neg(((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \to (\neg p \land \neg r)) \equiv \\ \neg(\neg((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \lor (\neg p \land \neg r)) \end{gathered} \tag{7.9}$$

Aplicar a Lei de De Morgan na negação mais externa nos leva à:

$$\begin{gathered} \neg(\neg((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \lor (\neg p \land \neg r)) \equiv \\ ((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \land \neg(\neg p \land \neg r) \end{gathered} \tag{7.10}$$

Aplicando De Morgan no último termo e eliminando as condicionais restantes através de equivalências lógicas, temos:

$$\begin{gathered} ((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \land \neg(\neg p \land \neg r) \equiv \\ (\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land (\neg(q \lor s) \lor t) \land \neg t \land (p \lor r) \end{gathered} \tag{7.11}$$

Por fim, aplicando De Morgan e a distributiva no terceiro termo, chegamos à FNC desejada:

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg(q \vee s) \vee t) \wedge \neg t \wedge (p \vee r) \equiv$$
$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg q \vee t) \wedge (\neg s \vee t) \wedge \neg t \wedge (p \vee r) \tag{7.12}$$

Observando a FNC, é possível notar que as cláusulas que a compõe são exatamente as mesmas obtidas no item anterior. Apenas para ilustrar que existe mais de um procedimento válido de prova por resolução, utilizaremos aqui o mesmo conjunto de cláusulas para validar o argumento, mas seguindo uma outra sequência de passos que nos levará à cláusula vazia *nil*.

Identificando e separando as cláusulas, podemos efetuar a seguinte prova por resolução (partindo do mesmo conjunto de cláusulas, mas de forma diferente do item anterior):

Cláusulas		Comentário
(1)	$\neg p \vee q$	cláusula da primeira premissa
(2)	$\neg r \vee s$	cláusula da segunda premissa
(3)	$\neg q \vee t$	cláusula 1 da terceira premissa
(4)	$\neg s \vee t$	cláusula 2 da terceira premissa
(5)	$\neg t$	cláusula da quarta premissa
(6)	$p \vee r$	cláusula da negação da conclusão
(7)	$\neg s$	resolvente da resolução de 4 e 5
(8)	$\neg r$	resolvente da resolução de 2 e 7
(9)	p	resolvente da resolução de 6 e 8
(10)	q	resolvente da resolução de 1 e 9
(11)	$\neg q$	resolvente da resolução de 3 e 5
(12)	nil	resolvente da resolução de 10 e 11

Portanto, a prova por resolução com a negação do teorema na forma condicional mostra a validade do argumento em questão.

7.5 Conclusões

Esta unidade apresentou o conceito de prova por resolução. Vimos que trata-se de um método bastante geral e que utiliza apenas uma regra, sendo fundamentado pelo princípio da resolução, que nos diz que o *resolvente* de duas cláusulas é consequência lógica delas. Foram apresentadas duas abordagens distintas, porém equivalentes, para conduzir a prova por resolução, uma baseada na negação da conclusão e outra baseada na negação do teorema como um todo em sua forma condicional. Em ambas, o destaque fica por conta da importância do estudo das formas normais, mais especificamente da FNC, que é essencial para a construção da prova por resolução. Finalizamos aqui nosso estudo sobre a lógica proposicional. Na Unidade 8, será apresentada uma introdução à lógica de predicados, que pode ser considerada como uma generalização da lógica proposicional.

7.6 Estudos complementares

Para um estudo mais aprofundado sobre métodos automatizados para prova de teoremas, Nicoletti (2009) apresenta um capítulo completo dedicado ao estudo do algoritmo de Wang, um método sintático que utiliza um conjunto de regras para aplicar transformações nas subfórmulas derivadas até que se atinja um determinado critério de parada. Métodos alternativos de prova, como os baseados em *tableux* semânticos, dentre outros, são discutidos em Souza (2008) e Silva (2006).

7.7 Exercícios

1) Considere as seguintes premissas:

Se Ana sente dor estômago, ela fica irritada.

Se Ana toma remédio para dor de cabeça, ela sente dor de estômago.

Ana não está irritada.

Logo, ela não tomou remédio para dor de cabeça.

Prove que o argumento acima é válido, utilizando:

a) Prova por resolução com a negação da conclusão.

b) Prova por resolução com a negação do teorema na forma condicional.

2) Considere as seguintes premissas:

Se o universo é finito, então a vida é curta.

Se a vida vale a pena, então a vida é complexa.

Se a vida é curta ou complexa, então a vida tem sentido.

A vida não tem sentido.

Utilizando o princípio da resolução com negação da conclusão, prove as seguintes assertivas:

a) Se o universo é finito e a vida vale a pena, então, a vida tem sentido.

b) A vida não é curta.

c) A vida não é complexa ou o universo não é finito.

d) A vida vale a pena se e somente se a vida tem sentido.

3) Repita cada item do exercício anterior utilizando o princípio da resolução com a negação do teorema na forma condicional.

4) Considere as seguintes premissas:

Se o programa é bom ou passa no horário nobre, o público assiste.

Se o público assite e gosta, então, a audiência é alta.

Se a audiência é alta, então, a propaganda é cara.

O programa passa no horário nobre, mas a propaganda é barata.

Logo, o público não gosta do programa.

Prove que o argumento acima é válido, utilizando:

a) Prova por resolução com a negação da conclusão.

b) Prova por resolução com a negação do teorema na forma condicional.

5) Considere as seguintes premissas:

Se o time joga bem, ganha o campeonato.

Se o time não joga bem, o técnico é culpado.

Se o time ganha o campeonato, os torcedores ficam contentes.

Os torcedores não estão contentes.

Logo, o técnico é culpado.

Prove que o argumento acima é válido, utilizando:

a) Prova por resolução com a negação da conclusão.

b) Prova por resolução com a negação do teorema na forma condicional.

7.8 Referências

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

SILVA, F. S. C.; FINGER, M.; MELO, A. C. V. *Lógica para Computação*. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

7.9 Referências consultadas

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

GUIMARÃES, J. O. *Introdução à Lógica Matemática*. Disponível em: <http://www2.dc.ufscar.br/~jose/courses/09-1/LC/Logica para Computacao.pdf>. Acesso em: 15 out. 2011.

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of Mathematical Logic*. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1999.

RAUTENBERG, W. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. 3. ed. Berlin: Springer, 2010.

UNIDADE 8

Lógica de predicados: introdução e conceitos básicos

8.1 Primeiras palavras

Conforme vimos nas unidades anteriores, a lógica proposicional é um formalismo que permite a representação e dedução de conhecimento de forma sistemática e precisa. Porém, em diversas situações, a lógica proposicional não é suficiente para representar toda a base de conhecimento a respeito de problemas e suas soluções.

Veremos aqui que a lógica de predicados, também conhecida como lógica de primeira ordem, que pode ser entendida como uma generalização da lógica proposicional, é bem mais abrangente, permitindo a representação de uma quantidade bem maior de conhecimento, graças à existência dos quantificadores, funções e predicados em sua linguagem. Isso permite a representação de um número muito maior de sentenças da linguagem natural, por exemplo. Em outras palavras, a estrutura da lógica proposicional está imersa na estrutura da lógica de predicados, o que reforça a importância de todo conteúdo apresentado nas unidades anteriores.

Nesta unidade serão apresentados os conceitos básicos da lógica de predicados, como quantificadores, negação de sentenças quantificadas, seu alfabeto, representação de sentenças da linguagem natural, bem como algumas considerações iniciais sobre regras de inferência.

8.2 Problematizando o tema

O objetivo primário do estudo da lógica de predicados é generalizar a lógica proposicional para obter um sistema lógico mais amplo, capaz de expressar sentenças muito mais complexas. Vamos considerar, por exemplo, o enunciado: *todo S é P*. O que essa expressão quer de fato dizer é *qualquer que seja* x*, se* x *é S, então,* x *é P*. Esse é um tipo de sentença que jamais poderia ser representada na lógica proposicional.

Convém notar, no entanto, que nessa sentença há uma condicional, da mesma maneira que acontecia na lógica proposicional. A diferença agora é justamente a presença do quantificador universal (que significa *para todo* ou *qualquer que seja*) e dos predicados S e P. Veremos que na lógica de predicados dois quantificadores são utilizados: o universal, que associa uma determinada assertiva a todos os indivíduos de um certo domínio, e o existencial, que relaciona a assertiva a alguns indivíduos do domínio. Outros exemplos de sentença que podem ser representadas na lógica de predicados são:

- todos os homens são mortais.
- existem pessoas bondosas, no entanto nem todas são bondosas.
- alguns alunos estudam, mas nem todos os alunos são aprovados.
- nem todas as pessoas sabem dirigir.

8.3 A linguagem da lógica de predicados

Nesta seção iremos definiremos de maneira um pouco mais formal, tudo o que foi dito nas seções anteriores, através da definição da linguagem da lógica de predicados. Da mesma maneira que na lógica proposicional, podemos definir um alfabeto da lógica de predicados composto por duas classes de símbolos: os lógicos, cuja interpretação independe do contexto em que estamos), e os não lógicos, cuja interpretação varia de problema para problema.

O alfabeto da lógica de predicados é definido pelo conjunto de símbolos descritos a seguir.

Símbolos lógicos

- operadores lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$
- quantificadores: $\forall$ e $\exists$
- símbolos de pontuação: (e)

Símbolos não lógicos

- constantes: representadas por letras minúsculas, em geral de *a* a *t*
- variáveis: representadas usualmente pelas letras minúsculas *u*, *v*, *w*, *x*, *y*
- letras predicativas (ou predicados): representadas por letras maiúsculas

Para garantir que existam símbolos suficientes para representar qualquer conjunto de sentenças, por mais complexo que seja, é permitida a utilização de subscritos numéricos como a_{13}, x_2 e P_5. Assim, uma fórmula da linguagem da lógica de predicados é definida como sendo qualquer sequência de símbolos desse alfabeto. Porém, muitas delas não tem sentido nenhum para nosso estudo. Assim como na lógica proposicional, nosso interesse é nas fórmulas bem-formadas, ou seja, aquelas que seguem uma estrutura sintática bem definida.

A seguir apresentaremos algumas definições básicas importantes.

Definição 8.1: um predicado P é dito n-ário se ele possui n argumentos, ou seja, se pode ser escrito como $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, no qual a_i é uma constante.

Definição 8.2: se P é um predicado n-ário, então, ele é uma fórmula atômica.

É interessante notar a analogia com a lógica proposicional. Enquanto lá os átomos eram proposições simples, aqui são predicados. Esse é um dos motivos pelos quais podemos caracterizar a lógica proposicional como um subconjunto da lógica de predicados.

O conceito de fórmula bem-formada (ou *WFF*) da lógica de predicados é definido pelas seguintes regras de formação (NOLT & ROHATYN, 1991):

- toda fórmula atômica é uma *WFF*
- se ϕ é uma *WFF*, então $\neg\phi$ é uma *WFF*
- se ϕ e ψ são *WFFs*, então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$ são *WFFs*

- se ϕ é uma *WFF* contendo uma constante a, então, qualquer fórmula da forma $\forall x \phi^x/a$ ou $\exists x \phi^x/a$, onde ϕ^x/a é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de a na fórmula ϕ por uma variável x que não ocorre na fórmula. Dizemos, neste caso, que a fórmula é uma sentença quantificada.

Uma observação quanto às sentenças da lógica de predicados é que nem todos os enunciados necessitam de quantificadores. Por exemplo, enunciados do tipo sujeito-predicado, que apenas atribuem uma propriedade a uma pessoa ou objeto, como em *Carlos é médico*. Outros casos são sentenças simples do tipo predicado-sujeito-objeto, como em *Maria adora sorvete*.

A seguir veremos exemplos ilustrativos adaptados de Nolt & Rohatyn (1991) sobre fórmulas bem-formadas na lógica de predicados.

Exemplo 1: formalizar os enunciados abaixo considerando a seguinte interpretação de símbolos: as constantes b e c representam respectivamente os nomes próprios Bernardo e Carol; as letras predicativas M, E e A são os predicados unários 'é mecânico', 'é enfermeira' e 'é anel'; as letras predicativas L e T são os predicados binários '... ama ...' e '... é mais alto que ...'; a letra predicativa D é o predicado ternário '... dá ... para ...'.

a) Carol e Bernardo são mecânicos.

b) Carol é mecânica ou enfermeira.

c) Se Carol é mecânica, então, ela não é enfermeira.

d) Bernardo ama Carol.

e) Bernardo ama qualquer pessoa.

f) Qualquer um ama a Carol.

g) Qualquer pessoa ama a si mesma.

h) Existe alguém que ama tanto Bernardo como Carol.

i) Existe alguém que Bernardo ama e alguém que Carol ama.

j) Carol deu alguma coisa para Bernardo.

k) Bernardo deu um anel para Carol.

l) Existe alguém que ama todo mundo.

m) Se Bernardo não ama a si próprio, então, ele ama ninguém.

n) Para quaisquer três objetos, se o primeiro é mais alto que o segundo e o segundo é mais alto que o terceiro, então, o primeiro é mais alto que o terceiro.

Solução:

a) $M(c) \wedge M(b)$

b) $M(c) \vee E(c)$

c) $M(c) \rightarrow \neg E(c)$

d) $L(b, c)$

e) $\forall x(L(b, x))$

f) $\forall x(L(x, c))$

g) $\forall x(L(x, x))$

h) $\exists x(L(b, x) \wedge (L(c, x)))$

i) $\exists x(L(b, x)) \wedge \exists y(L(c, y))$

j) $\exists x(D(c, x, b))$

k) $\exists x(A(x) \wedge D(b, x, c))$

l) $\exists x(\forall y(L(x, y)))$

m) $\neg L(b, b) \rightarrow \forall x(\neg L(b, x))$

n) $\forall x \forall y \forall z((T(x, y) \wedge T(y, z)) \rightarrow T(x, z))$

Exemplo 2: formalizar os seguintes enunciados considerando a seguinte interpretação de símbolos: a letra predicativa C é o predicado de aridade 0 (não tem nenhum argumento) 'Está chovendo'; as letras predicativas R, V e S são os predicados unários 'é uma rã', 'é verde' e 'é saltitante'.

a) Se está chovendo, então, todas as rãs estão saltitando.

b) Todas as rãs verdes estão saltitando.

c) Não é verdade que algumas rãs verdes estão saltitando.

d) Se nada é verde, então, não existem rãs verdes.

e) Rãs verdes saltam se e somente se não está chovendo.

Solução:

a) $C \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow S(x))$

b) $\forall x((R(x) \wedge V(x)) \rightarrow S(x))$

c) $\neg\exists x(R(x) \wedge V(x) \wedge S(x))$

d) $\forall x(\neg V(x)) \rightarrow \neg\exists x(R(x) \wedge V(x))$

e) $\forall x((R(x) \wedge V(x)) \rightarrow (S(x) \leftrightarrow \neg C))$

É interessante notar que o operador de negação pode ser utilizado também em quantificadores para expressar enunciados como *não existem* ou *não é verdade que todo*. Veremos na próxima seção alguns resultados que relacionam a negação de sentenças quantificadas com regras da álgebra proposicional, como as Leis de De Morgan.

8.4 Valores lógicos de sentenças quantificadas

Até o momento o foco da discussão foram os aspectos sintáticos da lógica de predicados, ou seja, como fazemos para construir fórmulas válidas. Nesta seção estamos interessados em estudar aspectos semânticos, ou seja, desejamos responder à seguinte pergunta: quando uma sentença quantificada é verdadeira?

Quando queremos obter o valor lógico de uma sentença quantificada, precisamos especificar o domínio (ou conjunto universo U) da variável ou variáveis envolvidas, que nada mais é que o conjunto de todos os possíveis valores que ela(s) pode(m) assumir. Por exemplo, considere a sentença matemática: $2 + 1 < 10$. Esse é um tipo de proposição que estávamos acostumados a lidar na lógica proposicional. Chamaremos essa proposição de P. Sabemos que o valor lógico de P é V, pois ela expressa uma verdade independente de qualquer contexto. Agora, suponha a sentença: $x + 1 < 10$. Nesse caso, seu valor lógico depende do conjunto universo da variável x, pois trata-se de uma sentença aberta. Outro conceito importante que será definido é o de conjunto-verdade.

Definição 8.3: o conjunto verdade V de uma sentença quantificada é o conjunto dos valores da variável para os quais a sentença é verdadeira.

Assim, podemos definir regras para determinar o valor verdade de sentenças quantificadas baseado nas definições de domínio (conjunto universo) e conjunto verdade (Daghlian, 2009).

Definição 8.4: a sentença $\forall x(P(x))$ é verdadeira se e somente se o conjunto verdade de $P(x)$ e o conjunto universo forem iguais, ou seja, $U = V$, sendo falsa quando $U \neq V$. A tabela abaixo ilustra alguns exemplos:

$\forall x(P(x))$	U	V	valor lógico
$\forall x(x = 0)$	$\{0\}$	$\{0\}$	V
$\forall x(x = 0)$	$\{0, 1\}$	$\{0\}$	F
$\forall x(2x - 1 = 5)$	$\{3\}$	$\{3\}$	V
$\forall x(2x - 1 = 5)$	$\{x : x \in N\}$	$\{3\}$	F

Definição 8.5: a sentença $\exists x(P(x))$ é verdadeira se e somente se o conjunto verdade de $P(x)$ é não vazio, ou seja, $V \neq \oslash$, sendo falsa quando $U = \oslash$.

$\exists x(P(x))$	U	V	Valor Lógico
$\exists x(x = 0)$	$\{0\}$	$\{0\}$	V
$\exists x(x = 0)$	$\{0, 1\}$	$\{0\}$	V
$\exists x(2x - 1 = 5)$	$\{3\}$	$\{3\}$	V
$\exists x(2x - 1 = 5)$	$\{x : x \in N\}$	$\{3\}$	V
$\exists x(2x - 1 = 5)$	$\{0, 1, 2\}$	$\{3\}$	F

Assim como no cálculo proposicional, a grande motivação do estudo da lógica de predicados é a construção de mecanismos sistemáticos de inferência.

A principal diferença entre o cálculo proposicional e a lógica de predicados é que, além de todo aquele conjunto de regras apresentado anteriormente, são necessárias novas regras para tratar especificamente dos quantificadores universal e existencial. Veremos a seguir aspectos introdutórios da utilização de regras de inferência na lógica de predicados.

8.5 Inferência na lógica de predicados

Basicamente, a inferência na lógica de predicados adiciona ao conjunto de regras de inferência da lógica proposicional duas regras para o quantificador universal (eliminação universal e introdução universal), duas regras para o quantificador existencial (eliminação existencial e introdução existencial), regras para introdução e eliminação da identidade, além de quatro regras para intercâmbio de quantificadores, baseadas nas propriedades da negação, conforme veremos mais adiante. O exemplo a seguir ilustra uma demonstração no cálculo de predicados que usa apenas regras da lógica proposicional.

Exemplo 3: prove o argumento $\neg F(a) \vee \exists x(F(x)), \exists x(F(x)) \rightarrow P \vdash F(a) \rightarrow P$.

Solução:

(1)	$\neg F(a) \vee \exists x(F(x))$	premissa	
(2)	$\exists x(F(x)) \rightarrow P$	premissa	
(3)	$F(a)$	hipótese (prova condicional)	
(4)	$\neg(\neg F(a))$	dupla negação	3
(5)	$\exists x(F(x))$	silogismo disjuntivo	$1, 4$
(6)	P	*modus ponens*	$2, 5$
(7)	$F(a) \rightarrow P$	eliminação da hipótese	$3, 7$

Apenas para mostrar a analogia entre o cálculo proposicional e o cálculo de predicados, alguns exemplos simples de utilização das regras de eliminação e introdução universal serão apresentados a seguir.

8.5.1 Regras de inferência para o quantificador universal

Basicamente, a regra de eliminação do quantificador universal define que o que é válido para qualquer coisa (todo universo) deve ser verdadeiro também para um objeto específico daquele universo. Essa regra é definida conforme segue (NOLT & ROHATYN, 1991):

Eliminação universal (EU): de uma *WFF* quantificada universalmente, isto é, $\forall x(P(x))$, podemos inferir uma *wff* da forma $P(a)$, substituindo cada ocorrência da variável x pela constante a.

Exemplo 4: prove a validade do argumento seguinte.

Todos os homens são mortais.

Sócrates é um homem.

Portanto, Sócrates é mortal.

Solução:

Escrevendo o argumento na linguagem da lógica de predicados, temos:

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), H(s) \vdash M(s) \tag{8.1}$$

A validade desse argumento é demonstrada de acordo com a seguinte prova:

(1)	$\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$	premissa	
(2)	$H(s)$	premissa	
(3)	$H(s) \rightarrow M(s)$	eliminação universal	1
(4)	$M(s)$	*modus ponens*	$2, 3$

Exemplo 5: prove a validade do argumento seguinte.

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \forall x(F(x)) \vdash G(a) \tag{8.2}$$

Solução:

A validade desse argumento é demonstrada de acordo com a seguinte prova:

(1)	$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	premissa	
(2)	$\forall x(F(x))$	premissa	
(3)	$F(a) \rightarrow G(a)$	eliminação universal	1
(4)	$F(a)$	eliminação universal	2
(5)	$G(a)$	*modus ponens*	3, 4

A regra introdução universal permite utilizar na prova um indivíduo a como um representante de todos os indivíduos do universo. Porém, ela possui uma série de restrições e, por esse motivo, não a apresentaremos aqui. Maiores detalhes sobre essa regra podem ser encontrados em Nolt & Rohatyn (1991).

Veremos agora, de maneira sucinta, a regra introdução existencial, definida como segue (Nolt & Rohatyn, 1991):

Introdução existencial (IE): dada uma *WFF* contendo uma constante a, por exemplo, $P(a)$, podemos inferir uma *wff* da forma $\exists x(P(x))$, substituindo as ocorrências de a, por uma variável x que não ocorra na fórmula.

Exemplo 6: demonstre a validade do argumento seguinte.

$$\forall x(F(x) \vee G(x)) \vdash \exists x(F(x) \vee G(x)) \tag{8.3}$$

Solução:

A validade desse argumento é demonstrada de acordo com a seguinte prova:

(1)	$\forall x(F(x) \vee G(x))$	premissa	
(2)	$F(a) \vee G(a)$	eliminação universal	1
(3)	$\exists x(F(x) \vee G(x))$	introdução existencial	2

Por fim, a regra eliminação existencial permite, sob certas condições, assumir como hipótese uma instância de uma sentença existencial. Porém, assim como a regra introdução universal a utilização desta regra requer vários cuidados e, por essa razão, não nos aprofundaremos nesse assunto. Maiores detalhes podem ser encontrados em Nolt & Rohatyn (1991) e Hilbert & Ackermann (1999).

8.6 Negação de sentenças quantificadas

Para introduzir o conceito de negação de sentenças quantificadas, o texto apresentado nesta seção é baseado no conteúdo de Daghlian (2009). Considere uma sentença aberta ou predicado $P(x)$ e o conjunto universo da variável x definido por $U = \{a, b, c, d, \ldots\}$. Então, se $P(x)$ é verdadeira, significa que é válida a seguinte equivalência:

$$\forall x(P(x)) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge P(d) \wedge \ldots \tag{8.4}$$

Assim, sua negação é dada por:

$$\neg(\forall x(P(x))) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge P(d) \wedge \ldots) \tag{8.5}$$

Mas, pela Lei de De Morgan temos que:

$$\neg(\forall x(P(x))) \equiv (\neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c) \vee \neg P(d) \vee \ldots) \tag{8.6}$$

Isso resulta em:

$$(\neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c) \vee \neg P(d) \vee \ldots) \equiv \exists x(\neg P(x)) \tag{8.7}$$

Dessa forma, temos a seguinte regra:

$$\neg(\forall x(P(x))) \equiv \exists x(\neg P(x)) \tag{8.8}$$

Vejamos agora o que acontece no caso inverso. Supondo que $P(x)$ é verdade, então, também é válida a seguinte equivalência:

$$\exists x(P(x)) \equiv P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee P(d) \vee \ldots \tag{8.9}$$

Sua negação é dada por:

$$\neg(\exists x(P(x))) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee P(d) \vee \ldots) \tag{8.10}$$

Mas novamente pela Lei de De Morgan, temos que:

$$\neg(\exists x(P(x))) \equiv (\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c) \wedge \neg P(d) \wedge \ldots) \tag{8.11}$$

Isso resulta em:

$$(\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c) \wedge \neg P(d) \wedge \ldots) \equiv \forall x(\neg P(x)) \tag{8.12}$$

Sendo assim, temos uma segunda regra:

$$\neg(\exists x(P(x))) \equiv \forall x(\neg P(x)) \tag{8.13}$$

Essas duas importantes equivalências são conhecidas como segunda Lei da negação de De Morgan. Em resumo, o que essas regras nos dizem é que *a negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial, e vice-versa* (ALENCAR FILHO, 2002).

Esse resultado é importante pois, apesar de ser um resultado teórico obtido na lógica de predicados, transcende barreiras pois acaba sendo útil nas linguagens naturais, como português ou inglês, por exemplo. Veremos a aplicação disso nos exemplos a seguir.

Exemplo 7: negar a senteça *existem pessoas que não gostam de estudar*.

Solução:

Escrevendo na linguagem da lógica de predicados, temos:

$\exists$: existem

x: pessoas

$P(x)$: gostam de estudar

Portanto, a sentença que queremos negar é $\exists x(\neg P(x))$. Utilizando as regras da negação teremos que $\neg\exists x(\neg P(x)) \equiv \forall x(P(x))$, o que corresponde à *todas as pessoas gostam de estudar*, que é equivalente à sentença *não há quem não goste de estudar*.

Exemplo 8: negar a senteça *todos os pescadores são mentirosos*.

Solução:

$\forall$: todos

x: pescadores (nosso domínio são os pescadores)

$P(x)$: pescadores são mentirosos

Utilizando as regras da negação teremos que $\neg\forall x(P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$, o que corresponde à *existe pescador que não é mentiroso*.

Outros exemplos de negação de sentenças utlizadas em linguagem natural são:

a) Existe ao menos um aluno que está doente

Negação: *qualquer que seja o aluno, ele não está doente*, ou em palavras mais simples, *nenhum aluno da turma está doente*.

b) Existe um planeta que é habitável

Negação: *todos os planetas não são habitáveis*, o que quer dizer a mesma coisa que *nenhum planeta é habitável*.

8.7 Conclusões

Esta unidade apresentou uma breve introdução à lógica de predicados a partir da definição de conceitos básicos como seu alfabeto, fórmulas bem-formadas, sua utilidade como linguagem de representação de conhecimento, bem como alguns aspectos semânticos relacionados à inferência e à negação de expressões válidas. Por fim, o que é realmente importante se ter em mente neste momento é que o ponto chave desta unidade foi caracterizar que a lógica proposicional nada mais é que um subconjunto da lógica de predicados, no sentido de que a última é constituída de tudo aquilo que foi apresentado neste material, mais um conjunto de ferramentas que permite não somente representar um número muito maior e mais abrangente de informação, como também extrair mais conhecimento através de mecanismos de inferência mais poderosos.

8.8 Estudos complementares

O conteúdo apresentado nesta unidade corresponde apenas a uma introdução extremamente superficial da lógica de predicados. Diversos aspectos relevantes a um tratamento mais rigoroso e formal foram deixados de lado em detrimento de outros assuntos abordados neste material. Para um estudo mais detalhado e aprofundado recomendamos Nicoletti (2009), Nolt & Rohatyn (1991) e Hilbert & Ackermann (1999). Em Nicoletti (2010) diversos aspectos fundamentais como os conceitos de substituição, unificação, formas normais e resolução em lógica de predicados são discutidos detalhadamente junto a exemplos e aplicações.

8.9 Exercícios

1) Apresentar a negação de cada uma das seguintes proposições:

a) $\forall x(P(x)) \wedge \exists x(Q(x))$

b) $\exists x(P(x)) \vee \forall x(Q(x))$

c) $\exists x(\neg P(x)) \vee \forall x(\neg Q(x))$

d) $\exists x(P(x)) \rightarrow \forall x(\neg Q(x))$

2) Verifique se as sentenças a seguir são equivalentes:

a) *Nem todo político é corrupto* e *existe político que não é corrupto*

b) *Nem todo jogador brasileiro é conhecido* e *existe jogador brasileiro desconhecido*

3) Formalize as sentenças abaixo utilizando a interpretação dada a seguir.

Símbolo	Interpretação
Nomes	
a	André
b	Beatriz
f	fama
d	dinheiro
Predicados unários	
F	é famoso
A	é ambicioso
H	é ser humano
Predicado binário	
G	... gosta de ...
Predicado ternário	
P	... prefere ... a ...

a) André prefere Beatriz a dinheiro e fama.

b) Beatriz prefere qualquer coisa a André.

c) Alguns humanos são ambiciosos e famosos.

d) Nem toda pessoa que gosta de dinheiro é ambiciosa.

e) Ninguém gosta de todo mundo.

f) André gosta de todo ser humano que gosta dele.

g) Nem todos gostam de todos que são famosos.

h) Se André é ambicioso e Beatriz não é, então, André e Beatriz não são idênticos.

i) André é o único ser humano que não é ambicioso.

j) André prefere dinheiro a qualquer coisa mais.

k) Todo ser humano que prefere dinheiro a qualquer coisa mais, é também ambicioso.

4) Formalize os argumentos abaixo utilizando a interpretação dada a seguir.

Símbolo	Interpretação
Nomes	
p	lógica proposicional
r	lógica de predicados
i	lógica de predicados com identidade
Predicados unários	
R	é um conjunto de regras
S	é um sistema formal
Predicado binário	
F	... é uma fórmula de ...
P	... é uma parte de ...
W	... é uma *wff* de ...

a) A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados. Portanto, a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional.

b) Todo sistema formal é um conjunto de regras. Portanto, todo conjunto de regras é um sistema formal.

c) Não é verdade que não existem sistemas formais, pois a lógica de predicados é um sistema formal.

d) Como todo sistema formal é um conjunto de regras, nada que não é um conjunto de regras não é um sistema formal.

e) Existem fórmulas da lógica de predicados. Portanto, existem *WFFs* da lógica de predicados, pois todas as *WFFs* da lógica de predicados são fórmulas desta.

f) Se um sistema formal é parte de um segundo sistema formal, então, toda *WFF* do primeiro é uma *WFF* do segundo. A lógica de predicados é uma parte da lógica de predicados com identidade e ambas são sistemas formais. Assim, toda *WFF* da lógica de predicados é também uma *WFF* da lógica de predicados com identidade.

g) Se uma coisa é parte de uma outra segunda e esta segunda coisa é uma parte de uma terceira, então, a primeira é uma parte da terceira. A lógica de predicados é uma parte da lógica de predicados com identidade. Portanto, se a lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados, então, a lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados com identidade.

h) Tudo é uma parte de si mesmo. Logo, se uma coisa não é uma parte de outra, as duas não são idênticas.

i) A lógica de predicados e a lógica proposicional são sistemas formais. A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados, mas a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional. Logo, existem pelo menos dois sistemas formais distintos.

8.10 Referências

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of Mathematical Logic*. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1999.

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

NOLT, J.; ROHATYN, D. *Lógica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

8.11 Referências consultadas

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

GUIMARÃES, J. O. *Introdução à Lógica Matemática*. Disponível em: <http://www2.dc.ufscar.br/~jose/courses/09-1/LC/Logica para Computacao.pdf>. Acesso em: 15 out. 2011.

RAUTENBERG, W. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. 3. ed. Berlin: Springer, 2010.

SILVA, F. S. C.; FINGER, M.; MELO, A. C. V. *Lógica para Computação*. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

SOBRE O AUTOR

Alexandre Luis Magalhães Levada

O professor Alexandre Luis Magalhães Levada é graduado em Ciência da Computação pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP - Campus de Rio Claro), mestre em Ciência da Computação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e doutor em Física Computacional pela Universidade de São Paulo (USP). Atualmente é professor adjunto do Departamento de Computação da UFSCar, atuando como docente nos cursos de Bacharelado em Ciência da Computação e Engenharia da Computação. Como pesquisador, suas áreas de interesse são reconhecimento de padrões, processamento de imagens e aplicações da teoria dos grafos, com ênfase na modelagem contextual de dados e inferência em modelos de campos aleatórios Markovianos.

Este livro foi impresso em novembro de 2011 pelo Departamento de Produção Gráfica – UFSCar.