1

TÓPICOS DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Este capítulo será dedicado ao escalonamento de matrizes através do Método de Eliminação de Gauss e também do Método de Gauss-Jordan, tendo como aplicações imediatas o cálculo do posto de matriz, a resolução de sistemas de equações lineares e a inversão de matrizes por escalonamento.

Aproveitamos o conteúdo para sugerir atividades computacionais ligadas ao cálculo matricial, remetendo ao capítulo 7, em que introduzimos o programa Octave e oferecemos atividades que complementam este capítulo, em 7.2.

1.1 Introdução aos sistemas de equações lineares

Na Geometria Analítica veremos, entre outras aplicações, que retas no plano podem ser definidas por equações lineares a duas variáveis (da forma $ax + by + c = 0$ em que x e y são as variáveis e a, b e c constantes); que planos podem ser definidos por equações lineares a três variáveis (da forma $ax+by+cz+d = 0$, em que x, y e z são as variáveis e a, b, c e d constantes); que uma reta no espaço pode ser dada como intersecção de dois planos $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$, e, portanto, como solução de um sistema de duas equações a três variáveis, isto é, na forma $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = D_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = D_2 \end{cases}$.

Assim, uma boa compreensão de sistemas lineares vem de auxílio à boa condução dos estudos futuros.

Começaremos com um exemplo:

$$(*)\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 8 \\ x & + & y & + & 4z & = & 15 \\ & & 3y & + & 2z & = & 9 \end{cases}.$$

Este é um sistema de três equações lineares a três variáveis. Geometricamente, cada equação pode ser interpretada como um plano do espaço. Uma solução desse sistema é uma terna $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ de números reais, que satisfaz simultaneamente as três equações. Por exemplo, $x = 2$, $y = 1$ e $z = 3$ são uma solução do sistema. Podemos ainda dizer que $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ é uma solução. Na interpretação geométrica, a solução obtida é a intersecção dos três planos dados, no caso, exatamente o ponto $P = (2, 1, 3)$.

A matriz dos coeficientes desse sistema é dado por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz ampliada[8] do sistema é $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$.

Escrevendo $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, temos que o sistema linear original é equivalente à equação matricial $AX = B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ainda, $X_0 = (2, 1, 3)$ é solução do sistema, pois $AX_0 = B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

[8] Conhece-se a utilização da matriz ampliada num problema envolvendo sistema linear de três equações a três variáveis, publicada num manuscrito chinês em torno de 200 a.C. a 100 a.C., durante a Dinastia Han. Mas o uso do termo *matriz ampliada* parece ter sido introduzido pelo matemático norte-americano Maxime Bôcher. Veja mais em [4].

Formalizando, seja dado um sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}.$$

As matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ e $\widetilde{A} = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ são, respectivamente, a ***matriz dos coeficientes*** e a ***matriz completa*** (ou ***matriz ampliada***) do sistema.

Colocando $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, o sistema corresponde à equação matricial $AX = B$.

Observe que o sistema linear $AX = B$ também pode ser dado por:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Voltaremos a esta interpretação matricial no capítulo 3.

Os sistemas lineares também aparecem em problemas de diferentes áreas, como problemas de posicionamento global utilizados pelos GPS, análise de rede de fluxo de tráfego, circuitos elétricos e reações químicas. Veja estas aplicações em [4].

✍ **Exercícios 1.1** *Escreva cada sistema abaixo na forma matricial $AX = B$, identificando as matrizes A, X e B. Obtenha também a matriz ampliada $\widetilde{A}$.*

1. $\begin{cases} x_1 & + & 7x_2 & = & 4 \\ -2x_1 & - & 9x_2 & = & 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 & + & 6x_2 & = & -6 \\ 5x_1 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{cases}$

3. $$\begin{cases} & & x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x & + & 2y & & & = & 4 \\ -x & + & 3y & + & 3z & = & -2 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2u & + & 3v & - & 5w & + & 6t & = & 0 \\ & & 5v & & & + & 2t & = & 0 \\ & & & & w & - & 3t & = & 0 \end{cases}$$

Veja no capítulo 7 a utilização do programa Octave para apoio ao estudo da Geometria Analítica. Após uma pequena introdução, passamos a atividades que podem ser inseridas neste contexto. A atividade 7.2.1 (página 331) vem ao encontro deste momento. Nela entramos com a matriz dos coeficientes A, a matriz coluna dos termos independentes B, obtemos a matriz ampliada $AB = [A|B]$ digitando "`AB=[A,B]`" (por que não $\widetilde{A}$ no nome da matriz?). Obtemos uma solução de $AX = B$ diretamente com o comando "`A\B`". Calculamos também o determinante e a matriz inversa de A através de comandos próprios do Octave: "`det(A)`" e "`inv(A)`", relacionando-os com as soluções.

1.2 Métodos de Escalonamento

Antes de introduzirmos efetivamente os métodos de escalonamento, vamos tecer algumas considerações:

Observação 1: Existem certos sistemas simplificados em que é mais fácil efetuar substituições para resolvê-los. Nesta categoria, encaixam-se os sistemas com matrizes na forma escalonada como definiremos depois. Por exemplo, o sistema

$$(*)\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 8 \\ & & y & + & 4z & = & 13 \\ & & & & 2z & = & 6 \end{cases}$$

está numa forma triangular chamada forma "escalonada" e podemos resolvê-lo facilmente começando a substituição "trás-para-frente", fazendo $z = \dfrac{6}{2} = 3$, donde $y = 13 - 4z = 13 - 12 = 1$ e, portanto, $x = 8 - y - z = 8 - 1 - 3 = 4$.

Observação 2: Algumas alterações no sistema não afetam o conjunto das soluções, como:

(i) trocar duas equações entre si, que na matriz ampliada corresponde a trocar duas linhas entre si;

(ii) multiplicar uma equação por um número não nulo, que na matriz ampliada corresponde a multiplicar uma linha pelo número;

(iii) substituir uma equação pela soma dela com uma outra equação, que na matriz ampliada corresponde a somar a uma linha uma outra linha;

(iv) juntando as duas alterações anteriores, pode-se substituir uma equação pela soma dela com um múltiplo de outra equação, o que corresponde, na matriz ampliada, a somar a uma linha um múltiplo de outra linha.

Cuidado: em (iii) e (iv), a **outra equação** *deve ser mantida!*

Para ilustrarmos (iii), vejamos no caso de um sistema de três variáveis x, y e z:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}.$$

Substituindo a segunda equação pela soma das duas, temos o novo sistema:

$$(**)\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{21}+a_{11})x + (a_{22}+a_{12})y + (a_{23}+a_{13})z = (b_2+b_1) \end{cases}.$$

É óbvio que uma solução (x_0, y_0, z_0) do sistema (*) satisfaz o sistema (**), pois se

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 = b_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 = b_2 \end{cases},$$

então

$$(a_{21}+a_{11})x_0 + (a_{22}+a_{12})y_0 + (a_{23}+a_{13})z_0 =$$
$$= \overbrace{(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0)}^{b_2} + \overbrace{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0)}^{b_1} = b_2 + b_1.$$

Reciprocamente, se (x_0, y_0, z_0) é uma solução de (**), então é uma solução de (*), pois a primeira equação é a mesma em ambos os sistemas, e a segunda equação de (*) pode ser obtida de (**) multiplicando a primeira equação por -1 e somando à segunda:

$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 =$$
$$= (a_{21}+a_{11})x_0 + (a_{22}+a_{12})y_0 + (a_{23}+a_{13})z_0 - (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) =$$
$$= (b_2+b_1) - b_1 = b_2.$$

◊

Uma das formas de analisar e resolver sistemas lineares consiste em trocar o sistema inicial por outro sistema **equivalente**, *isto é, com o mesmo conjunto de soluções, de forma que o novo sistema seja mais adequado para discussão e resolução, como, por exemplo, um sistema na "forma escalonada".*

1.2.1 *Método de Eliminação de Gauss*

Um dos métodos de resolução de sistemas lineares que vamos estudar aqui é o ***Método de Eliminação de Gauss***,[9] cujas alterações para simplificação do sistema são baseadas nas observações anteriores e são feitas de forma sistemática e objetiva.

Podemos sintetizar as alterações no sistema no Método de Eliminação de Gauss em três tipos:

1. Troca de equações entre si.

2. Multiplicação de uma equação por um escalar $\lambda \neq 0$.

3. Adição a uma equação de um múltiplo de outra (mantendo essa outra equação).

Essas alterações, na forma matricial, geram operações com linhas nas matrizes, chamadas ***operações elementares com linhas***.

1. Troca de linhas entre si. NOTAÇÃO: $L_i \longleftrightarrow L_j$

2. Multiplicação de uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$. NOTAÇÃO: $L_i \rightarrow \lambda L_i$

3. Adição a uma linha de um múltiplo de outra (mantendo essa outra linha).
   NOTAÇÃO: $L_i \rightarrow L_i + \lambda L_k$

Veja as operações elementares escritas na linguagem do programa Octave e uma pequena introdução à definição de ***funções*** neste programa, definindo as operações elementares acima como funções "`swaprow`," "`mulrow`" e "`addrow`", na atividade 7.2.2 da página 333.

---

[9] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) utilizou o método em parte do cálculo da órbita do asteroide Ceres. Uma versão do método foi publicado na China em torno de 200 a.C., mas popularizado somente quando publicado por Wilhelm Jordan, em 1888. Veja mais em [4].

Dizemos que uma matriz B, obtida de uma matriz A por uma sequência de operações elementares sobre linhas, é ***l-equivalente*** (linha-equivalente) à matriz A. Denotamos $B \overset{\ell}{\sim} A$.

Pode-se mostrar que $\overset{\ell}{\sim}$ é uma relação de equivalência, isto é, valem as propriedades: reflexiva ($A \overset{\ell}{\sim} A$), simétrica ($A \overset{\ell}{\sim} B$ implica $B \overset{\ell}{\sim} A$) e transitiva ($A \overset{\ell}{\sim} B$ e $B \overset{\ell}{\sim} C$ implica $A \overset{\ell}{\sim} C$).

O Método da Eliminação de Gauss para resolver um sistema linear consiste em procurar um novo sistema cuja matriz ampliada é l-equivalente à matriz ampliada original, e tem a ***forma escalonada***, definida a seguir.

DEFINIÇÃO: *Dizemos que uma matriz $M_{m\times n}$ está na* **forma escalonada** *se possui as seguintes características:*

1. *As linhas nulas, se houver, ficam abaixo das linhas não nulas.*
2. *Para cada linha não nula i, se a_{i,c_i} é o primeiro elemento não nulo da linha i, da esquerda para a direita, os elementos da coluna c_i abaixo da linha i são todos nulos.*

A segunda condição pode ser enunciada de outras formas:

$2'$. *Se denotamos por c_i o número da coluna em que ocorre o primeiro elemento não nulo da linha i, devemos ter $c_1 < c_2 < \cdots < c_r$ em que r é o número de linhas não nulas da matriz M.*

$2''$. *O número de zeros que antecedem o primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é crescente com as linhas.*

Isto faz com que a matriz na forma escalonada (ou ***matriz escalonada***) tenha uma ***escada de zeros*** na parte inferior da matriz, subindo da direita para a esquerda.

Vejamos um exemplo:

A matriz $A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz na forma escalonada, pois:

1. a linha nula está abaixo das duas linhas não nulas ($r = 2$);
2. o primeiro elemento não nulo da linha 1 é $A_{11} = 2$ e todos os elementos da coluna abaixo dele são nulos;

3. o primeiro elemento não nulo da linha 2 é $A_{23} = 1$ e todos os elementos da coluna abaixo dele são nulos.

Observe também que $c_1 = 1$ e $c_2 = 3$, donde $c_1 < c_2$.
Além disso, nas linhas não nulas 1 e 2, temos 0 e 2 zeros que antecedem os primeiros elementos não nulos de linhas, e $0 < 2$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{3} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$ não está na forma escalonada, pois $c_1 = 2 = c_2$.
E também o número de zeros antes do primeiro elemento não nulo da linha 1 é o mesmo na linha 2 (não crescente). E mais, abaixo do primeiro elemento não nulo da linha 1 tem o não nulo da linha 2.

Exercício

Para fixar as ideias, verifique quais das matrizes abaixo estão na forma escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

RESPOSTA: A, C, D, F, G.

O ***Método de Eliminação de Gauss*** para redução de uma matriz M a uma forma escalonada é dada pelo seguinte algoritmo:

1. *Seja c_1 a primeira coluna não nula de M, da esquerda para a direita.* Se necessário, troque as linhas para que o elemento da linha 1 e coluna c_1 seja não nulo, isto é, $M_{1c_1} \neq 0$. Esse elemento é chamado de ***pivô***. *Fixando a linha* 1, *anule os elementos abaixo do pivô $M_{1c_1} \neq 0$, utilizando as operações $L_i \to L_i - \dfrac{M_{ic_1}}{M_{1c_1}} \cdot L_1$, para cada $i > 1$. Chame a nova matriz de M^1.*

2. *Seja c_2 a coluna de M^1, contada da esquerda para a direita, em que existem elementos não nulos a partir da linha* 2. Se necessário, troque a linha 2 por alguma abaixo, de forma que $M^1_{2c_2} \neq 0$. Este é o novo pivô.
Fixando a linha 2, anule os elementos da coluna c_2, abaixo da linha 2 (abaixo do pivô).

As operações são $L_i \to L_i - \dfrac{M_{ic_2}}{M_{2c_2}} \cdot L_2$*, para* $i > 2$.
Chame a nova matriz de M^2.

3. *Continue o processo considerando* c_k *a primeira coluna de* M^{k-1}*, contada da esquerda para a direita, em que existem elementos não nulos a partir da k-ésima linha.* Se necessário, troque a linha k por alguma abaixo, para que $M^{k-1}_{kc_k} \neq 0$. Este é o k-ésimo pivô.
Fixando a linha k, anule os elementos da coluna c_k *abaixo da linha k, isto é, abaixo do k-ésimo pivô, com as operações* $L_i \to L_i - \dfrac{M_{ic_k}}{M_{kc_k}} \cdot L_k$ *para* $i > k$.

4. *Esse processo termina quando acabam as linhas não nulas ou as colunas.*

Por que utilizamos na operação elementar $L_i \to L_i - \dfrac{M_{ic_k}}{M_{kc_k}} \cdot L_k$ o multiplicador $\lambda = -\dfrac{M_{ic_k}}{M_{kc_k}}$? Lembre-se que para anular o novo elemento na posição (i, c_k) basta ver que λ é solução de $M^{novo}_{ic_k} = M_{ic_k} + \lambda \cdot M_{kc_k} = 0$.

Se você estiver utilizando uma calculadora para efetuar as contas, a escolha dos pivôs deve ser feita com mais cuidado, de forma a reduzir os erros. Uma escolha simples é utilizar como k-ésimo pivô o elemento de maior valor absoluto na coluna c_k*, a partir da linha k (conhecido como Eliminação de Gauss com* **pivoteamento parcial** *em Cálculo Numérico).*

Voltemos ao nosso exemplo:

$$(*)\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 8 \\ x & + & y & + & 4z & = & 15 \\ & & 3y & + & 2z & = & 9 \end{cases}, \text{ com matriz ampliada } \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

A matriz $M = \widetilde{A}$ não está na forma escalonada: como $M_{11} = 2$ é o primeiro elemento não nulo da primeira linha (logo $c_1 = 1$) e $M_{21} = 1$ é o primeiro elemento não nulo da segunda linha (logo $c_2 = 1$), temos $c_1 = 1 = c_2$ e, portanto, a condição $c_1 < c_2$ não é satisfeita. Ou, ainda, M não está na forma escalonada porque $M_{21} = 1 \neq 0$ está na mesma coluna e abaixo do primeiro elemento não nulo da primeira linha. Apliquemos a Eliminação de Gauss em M.

Vemos que $M_{1c_1} = M_{11} = 2 \neq 0$ e, portanto, podemos utilizá-lo como o primeiro pivô, isto é, podemos fixar a linha 1 e anular os termos da coluna $c_1 = 1$ abaixo de $M_{11} = 2$. No caso, basta fazer $L_2 \to L_2 - \dfrac{1}{2}L_1$.

Depois, fixando $M_{22} = \frac{1}{2}$ como o segundo pivô, anulamos abaixo dele com $L_3 \to L_3 - 6L_2$. A matriz E resultante já está na forma escalonada. Na sequência abaixo, destacamos os pivôs:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 6L_2} \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 0 & \boxed{-19} & -57 \end{bmatrix} = E.$$

Assim, o sistema (*) fica equivalente ao sistema escalonado:

$$(**) \begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 8 \\ & & \frac{1}{2}y & + & \frac{7}{2}z & = & 11 \\ & & & + & -19z & = & -57 \end{cases},$$

cuja solução pode ser obtida com substituição "trás-para-frente": $z = \dfrac{-57}{-19} = 3$, donde $y = 2 \cdot (11 - \frac{7}{2} \cdot 3) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ e $x = \frac{1}{2} \cdot (8 - 1 - 3) = 2$.

A atividade 7.2.3 (página 335) refaz o exemplo acima na linguagem Octave. Além disso, junto com ele iniciamos a programação do método do escalonamento no Octave, definindo uma função "`pivot`", em que, entrando com a matriz A e o elemento pivô, a função calcula a matriz com os elementos abaixo do pivô já devidamente zerados.

Exercícios 1.2.1

1. *Obtenha uma forma escalonada l-equivalente a cada uma das matrizes abaixo pelo método de Eliminação de Gauss:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. *Seu colega resolveu o exercício anterior, porém chegou a matrizes na forma escalonada diferentes do seu. Podem ambos terem acertado tudo?*

   RESPOSTA: É possível. Algumas trocas de linhas a mais, ou multiplicação de linha por algum valor não nulo (para simplificar as contas ou diminuir os erros de arredondamento), podem levar a valores distintos na matriz escalonada. Mas o número de linhas não nulas deve coincidir, assim como as posições dos pivôs.

3. *Suponha que M é uma matriz* 250×200. *Qual o número mínimo de* **linhas nulas** *que devem aparecer numa matriz escalonada l-equivalente a M?*

4. *Escalone a matriz*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 200 & 201 & 202 & 203 & 204 \end{bmatrix}$$

   utilizando o Método de Eliminação de Gauss, passo a passo. Confira o resultado no Octave.

1.2.2 Método de Gauss-Jordan

No *Método de Gauss-Jordan,*[10] a sequência de operações elementares deve levar a uma única matriz mais simplificada que simplesmente escalonada, chamada *matriz na forma escalonada reduzida por linhas* ou *matriz escalonada l-reduzida*:

---

[10] Wilhelm Jordan (1842-1899) foi um geodesista alemão e o método apareceu na terceira edição do seu livro *Geodesia*.

Definição: *Uma matriz R é uma matriz na forma escalonada* **reduzida por linhas** *(ou* **l-reduzida***) se:*

- *é uma matriz na forma escalonada;*
- *o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula (pivô) é* 1*;*
- *na coluna em que ocorre o primeiro elemento não nulo de alguma linha, todos os outros elementos (mesmo os acima) são nulos.*

A matriz escalonada $E = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 0 & \boxed{-19} & -57 \end{bmatrix}$ do exemplo anterior não é reduzida por linhas, pois os primeiros elementos não nulos das linhas são 2, $\frac{1}{2}$ e -19, diferentes de 1 e, além disso, não são os únicos elementos não nulos de sua coluna.

Já a matriz $R = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix}$ é reduzida por linhas. Confira!

As matrizes escalonadas reduzidas por linhas 3×3 podem ter seguintes fomatos:

- matriz nula;
- $\begin{bmatrix} \boxed{1} & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, com uma linha não nula;
- $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & x \\ 0 & \boxed{1} & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} \boxed{1} & x & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, com duas linhas não nulas;
- $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$, com três linhas não nulas.

Para obter a matriz escalonada reduzida por linhas (ou l-reduzida) R, a partir da matriz escalonada E, basta seguir o seguinte algoritmo:

1. *Transforme todos os pivôs em* 1*, multiplicando as linhas não nulas L_i pelos multiplicadores $\frac{1}{E_{ic_i}}$, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.*

2. *Comece pelo último pivô, anulando todos os elementos ACIMA dele, e prossiga até o segundo pivô (inclusive). Como acima do primeiro pivô não há elementos, o processo se completa.*

No exemplo, $E = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 0 & \boxed{-19} & -57 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \cdots$

$$\cdots \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 22 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix} = R.$$

Observe que o sistema correspondente à matriz ampliada R fornece a solução de imediato: $\begin{cases} x & & & = 2 \\ & y & & = 1. \\ & & z & = 3 \end{cases}$

Veja esta sequência no Octave e mais a obtenção direta através da função "`rref`" disponível no programa, na atividade 7.2.4 da página 337.

Se quiser obter a matriz na forma escalonada l-reduzida diretamente a partir da matriz original M, pode optar por transformar todos os pivôs em 1, desde o início, para simplificar a obtenção dos multiplicadores. Mais ainda, uma vez obtido o pivô 1, pode zerar todos os outros elementos da coluna antes de procurar o próximo pivô. Este é o método mais conhecido como o **Método de Gauss-Jordan**.

Como exemplo, vamos obter a matriz na forma escalonada l-reduzida de

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 200 & 201 & 202 & 203 & 204 \end{bmatrix}$$

pelo Método de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 200 & 201 & 202 & 203 & 204 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{pivot(M,1,1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 \\ 0 & -199 & -398 & -597 & -796 \end{bmatrix}$$

$$\cdots \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{-6} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 \\ 0 & -199 & -398 & -597 & -796 \end{bmatrix} = M*$$

$$\cdots \xrightarrow{\text{pivot(M*,2,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Acima, $pivot(A, k, c_k)$ seria uma função que anula todos os elementos da coluna do pivô A_{kc_k}, exceto o próprio. Como exercício, modifique a função do arquivo "`pivot.m`" fornecido para a tarefa na atividade 7.2.4 da página 337.

É fato que a cada matriz M, ***existe uma única matriz l-reduzida*** R ***tal que*** $R \overset{\ell}{\sim} M$.

✍ Exercícios 1.2.2

1. *Obtenha as matrizes na forma escalonada l-reduzida das matrizes do exercício 1 da seção anterior. Houve alguma alteração na posição dos pivôs em relação às matrizes escalonadas obtidas anteriormente?*

2. *Considere uma matriz M quadrada de ordem n. É verdade que se M é invertível, sua l-reduzida é a matriz identidade I_n?* RESPOSTA: mi2

1.3 POSTO DE MATRIZ

Observe que dada uma matriz M, se esta não for matriz nula, há sempre infinitas matrizes na forma escalonada obtidas a partir de M, mas todas elas têm em comum o número de linhas não nulas e as colunas em que aparecem os pivôs. Aproveitamos uma destas constantes para a definição do posto de uma matriz:

DEFINIÇÃO: *O* **posto**[11] *de uma matriz M é o número de linhas não nulas de qualquer matriz escalonada obtida a partir de M por operações elementares sobre linhas.*

Observamos que existe outra definição de posto de matriz, sem utilizar escalonamento:

[11] O matemático alemão Ferdinand Frobenius (1849-1917) definiu o conceito de posto (através de submatrizes) e utilizou a palavra ***rang***, em alemão ([4]). Em inglês, utiliza-se a palavra ***rank***, como na maioria dos programas computacionais, incluindo o Octave, para designar o posto de uma matriz.

"O posto de M é a ordem da maior submatriz quadrada de M com determinante não nulo".

Por exemplo, se M for quadrada e invertível, seu posto é a ordem da matriz.

Pode-se demonstrar que se trata do mesmo conceito, mas não o faremos aqui. Lembramos que uma ***submatriz*** de uma matriz M é obtida eliminando-se algumas linhas e/ou colunas de M. Observe que a ordem das linhas e colunas da submatriz deve obedecer à ordem na matriz original.

Com esta caracterização de posto de matriz (através de submatrizes) fica evidente que uma matriz M e sua transposta M^t têm o mesmo posto, já que uma submatriz de M^t é a transposta de uma submatriz de M e, além disso, os determinantes de uma matriz e sua transposta são iguais.

Mas vamos utilizar preferencialmente a definição via matriz na forma escalonada para o cálculo do posto.

Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ tem posto 2. De fato,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, o número de linhas não nulas da matriz na forma escalonada obtida é 2.

Fica como exercício encontrar uma submatriz 2×2 com determinante não nulo e verificar que todas as submatrizes 3×3 (quantas?) têm determinante 0. Fica como exercício também indicar quais operações elementares foram efetuadas nos passos acima.

Veja um exemplo no Octave acerca do exercício acima, na atividade 7.2.5 da página 338.

Exercícios 1.3

1. *Encontre o posto da matrizes $A \sim H$ do exercício 1 da seção 1.2.1.*

2. *As matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *são matrizes* 3×3 *na forma escalonada l-reduzida de posto 2 (independentemente dos valores de* x, y *e* z*). Quais são as de posto 1? E as de posto 3? As matrizes A e B podem ser l-equivalentes?*

3. *Justifique, usando a caracterização de posto de matriz como ordem da maior submatriz com determinante não nulo, que toda matriz invertível tem posto máximo, que é a ordem da matriz.*

4. *Invente matrizes, encontre uma forma escalonada e a forma escalonada l-reduzida de cada uma. Faça o mesmo com as transpostas. Compare os postos (devem ser iguais). Nas matrizes escolhidas, quais têm o posto máximo possível?*

1.4 Resolução de sistemas lineares por escalonamento

Vimos que o sistema linear $(*)\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$ discutido anteriormente tem solução única, isto é, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$ é solução e não existem outros valores para x, y e z que satisfaçam o sistema. Portanto é um sistema ***possível e determinado***.

Como a matriz ampliada $\widetilde{A} = [A|B]$ do sistema $(AX = B)$ é l-equivalente à matriz l-reduzida $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, em que a submatriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ corresponde à l-reduzida de A, temos que $p = posto(A)$ é igual a $q = posto(\widetilde{A})$, que é igual ao número de variáveis $n = 3$. Pelas observações preliminares à definição de posto, p e q podem ser calculadas com qualquer matriz na forma escalonada $E \overset{\ell}{\sim} \widetilde{A}$.

Lembramos que a solução única desse sistema determinado aparece na última coluna de R.

Consideremos agora outro exemplo:

$$(**)\begin{cases} x + y + 4z = 15 \\ \quad\;\; 3y + 2z = 9 \end{cases},$$

com matriz ampliada $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, já na forma escalonada.

Vamos obter a forma reduzida por linhas (l-reduzida) de $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 2/3 & 3 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10/3 & 12 \\ 0 & 1 & 2/3 & 3 \end{bmatrix} = R.$$

Logo, o sistema acima é equivalente a $\begin{cases} x \quad + \dfrac{10}{3}z = 12 \\ \quad y + \dfrac{2}{3}z = 3 \end{cases}$,

donde $x = 12 - \dfrac{10}{3}z$, $y = 3 - \dfrac{2}{3}z$ e z pode variar livremente, assumindo qualquer valor real.

Por exemplo,

- para $z = 0$, temos a solução $(x, y, z) = (12, 3, 0)$;
- para $z = 3$ temos outra solução $(x, y, z) = (2, 1, 3)$;
- para $z = t \in \mathbb{R}$ qualquer, temos $(x, y, z) = (12 - \dfrac{10}{3}t, 3 - \dfrac{2}{3}t, t) = (12, 3, 0) + t(-\dfrac{10}{3}, -\dfrac{2}{3}, 1)$.

O exemplo mostra um sistema com infinitas soluções, mais precisamente, um ***sistema possível e indeterminado***, com ***grau de liberdade*** igual a 1.

Ou seja, todas as soluções podem ser descritas variando livremente uma das variáveis (no caso, z) e as outras variáveis podem ser escritas em função dessa variável. A variável z acima é a chamada ***variável livre*** e t foi o ***parâmetro*** utilizado para descrevê-la.

Observe que, neste caso, $p = 2 = q < n = 3$ em que $p = posto(A)$, $q = posto(\widetilde{A})$ e n é o número de variáveis. Além disso, o grau de liberdade é $n - p = 3 - 2 = 1$.

Observe também que a variável livre z escolhida acima é correspodente à coluna 3 de R (ou de qualquer matriz escalonada $E \overset{\ell}{\sim} \widetilde{A}$), e nesta coluna não aparece nenhum pivô.

Veja a interpretação geométrica do sistema linear e do conjunto das soluções, na ilustração a seguir.

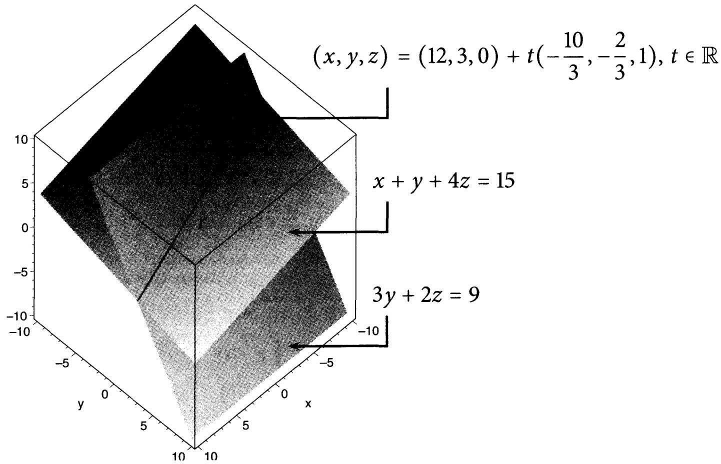

Figura 1.1 Interpretação geométrica de sistema linear $(**) \begin{cases} x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$: cada equação representa um plano e as soluções formam a reta de intersecção.

Se considerarmos o sistema $(***) \begin{cases} x & + & y & + & 4z & = & 15 \\ 2x & + & 2y & + & 8z & = & 30 \end{cases}$, com matriz ampliada $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 2 & 2 & 8 & 30 \end{bmatrix}$, teremos, pelo escalonamento, o sistema equivalente

$$\begin{cases} x & + & y & + & 4z & = & 15 \\ 0 & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{cases}.$$

Obviamente a segunda linha é nula e não tem influência no sistema. Assim, ficamos somente com a equação $x + y + 4z = 15$, e, portanto, $x = 15 - y - 4z$, em que y e z podem variar livremente.

Por exemplo, $(x, y, z) = (15, 0, 0)$, $(x, y, z) = (14, 1, 0)$ e $(x, y, z) = (11, 0, 1)$ são soluções particulares do sistema.

Para uso futuro, é interessante escrever as soluções na forma

$$(x, y, z) = (15, 0, 0) + t(-1, 1, 0) + s(-4, 0, 1),\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Isto pode ser obtido designando ***parâmetros*** às variáveis livres: $y = t$ e $z = s$, donde $(x, y, z) = (15 - y - 4z, y, z) = (15 - t - 4s, t, s) = (15, 0, 0) + (-t, t, 0) + (-4s, 0, s) = (15, 0, 0) + t(-1, 1, 0) + s(-4, 0, 1)$.

O sistema que acabamos de mostrar também é um ***sistema possível e indeterminado, com grau de liberdade*** 2. Observe que $p = q = 1 < 3 = n$ e as variáveis livres escolhidas correspondem às colunas 2 e 3 da matriz escalonada $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, em que não aparece nenhum pivô. Poderia ter utilizado outras variáveis como livres? Sim, mas com certeza as escolhidas funcionam bem.

Qual a interpretação geométrica deste sistema? Resposta: os planos descritos pelas equações são coincidentes e, portanto, o conjunto das soluções é o próprio plano, que pode ser descrito por dois parâmetros.

Observe que o grau de liberdade é a diferença entre o número de variáveis e o número de equações não nulas na forma escalonada que aparecem nos sistemas possíveis e indeterminados, ou seja, $n - p$ (que é igual a $n - q$, já que $p = q$).

Mas um sistema pode ser ***impossível***, se ao reduzirmos na forma escalonada obtivermos uma equação do tipo $0 = b \neq 0$, ou seja, desconsiderando a coluna dos termos independentes, a forma escalonada possui pelo menos uma linha não nula a menos que a matriz completa. Isto significa que $p = posto(A) < q = posto(\widetilde{A})$.

1.4.1 Teorema de Rouché-Capelli

Os exemplos anteriores ilustram o seguinte teorema acerca de soluções de sistemas lineares, em termos de postos de matrizes:

Teorema de Rouché-Capelli.[12] *Seja um sistema linear de m equações a n variáveis $AX = B$, cuja matriz dos coeficientes A tem posto p e cuja matriz ampliada $\widetilde{A}$ tem posto q. Então:*

1. *se $p \neq q$, o sistema é impossível;*
2. *se $p = q = n$, o sistema é possível e determinado;*
3. *se $p = q < n$, o sistema é possível e indeterminado, com grau de liberdade $n - p$.*

O teorema fica evidente se analisarmos os sistemas lineares na forma escalonada, de preferência na forma escalonada 1-reduzida:

---

[12] Também conhecido como Teorema de Rouché-Frobenius. Eugène Rouché (1832-1910) publicou uma versão em 1875, mas depois de George Fontené. Uma versão italiana apareceu em 1886 publicada por Alfredo Capelli (1855-1910). Ferdinand Frobenius (1849-1917), que introduziu o conceito de posto de matriz, reapresentou o Teorema em 1905, dando créditos a Rouché e Fontene. Veja em <http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Rouche.html> e em <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Printonly/Capelli.html>.

▶ 1. Se $p \neq q$, significa que a matriz ampliada escalonada tem a q-ésima linha do tipo $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_q \end{bmatrix}$, que corresponde à equação $0x_1 + \cdots + 0x_n = b_q$, sem solução, já que $b_q \neq 0$. Observe que $p \neq q$ só ocorre com $q = p + 1$.

▶ 2. Se $p = q = n$, as n linhas não nulas da matriz 1-reduzida da ampliada formam um bloco da forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{array}\right]$, donde a única solução é $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
Pode haver linhas nulas abaixo desse bloco, na matriz na forma escalonada 1-reduzida.

▶ 3. No caso $p = q < n$, veja o método apresentado a seguir. Fica claro que é possível escrever as $p = q$ variáveis correspondentes às colunas dos pivôs em função das outras $n - p$ incógnitas.

1.4.2 Sistemas indeterminados e a escolha das variáveis livres

Quando um sistema é possível e indeterminado, com grau de liberdade $n - p$, surgem as questões: quais são as variáveis livres? como apresentar as soluções?

Vamos agora indicar um método para a escolha das variáveis livres e a forma de apresentar as soluções com uso de parâmetros e algumas soluções particulares nos sistemas indeterminados.

▶ 1. *Obtenha a forma escalonada da matriz ampliada do sistema.* Essa matriz deve ter $p < n$ linhas não nulas e $n+1$ colunas. As primeiras n colunas correspondem às n variáveis.

▶ 2. *Determine quais variáveis são livres.* Se os pivôs estão nas colunas $c_1 < c_2 < \cdots < c_p$, as demais $n - p$ colunas (sem contar a última coluna) correspondem às variáveis livres.

As colunas com pivôs correspondem às variáveis que se escrevem em termos das variáveis livres (podendo inclusive ser constantes, como em $x_1 = 3 + 0x_2 + 0x_3 = 3$).

Por exemplo, se a matriz ampliada de um sistema nas variáveis x, y, z e w é dada por $\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 20 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, temos que os pivôs estãos nas colunas $c_1 = 1$ e $c_2 = 3$, de x e z, donde os candidatos às variáveis livres são as demais, y e w. Temos que $x = 10 - 20y - 3w$ e $z = 5 - w$.

▶ 3. *Utilizando parâmetros para as variáveis livres, escreva as soluções de forma a evidenciar cada parâmetro.*

Por exemplo, no sistema anterior, utilizando parâmetros $y = t$ e $w = s$, temos

$$(x, y, z, w) = (10 - 20t - 3s, t, 5 - s, s) =$$
$$= (10, 0, 5, 0) + t(-20, 1, 0, 0) + s(-3, 0, -1, 1), \text{com } t,\ s \in \mathbb{R}.$$

Essa apresentação das soluções facilita a identificação do conjunto das soluções e a ligação com o grau de liberdade na interpretação geométrica. Quando a solução é descrita com um parâmetro, a interpretação geométrica do conjunto das soluções é de um objeto de dimensão 1, como retas no plano ou no espaço. Quando são utilizados dois parâmetros na descrição das soluções, temos um plano de soluções (dimensão 2).

Observamos que o comando "`A\B`" para resolver o sistema $AX = B$ no Octave funciona bem se o sistema for possível e determinado. Quando $p < q$, o comando resulta em somente uma das soluções. É importante conhecer o Teorema de Rouché-Capelli para saber se existem outras soluções além da apresentada pelo computador. Como obter outras soluções?

1.4.3 Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear é **homogêneo** *se os termos independentes são todos nulos, isto é, é um sistema da forma $AX = 0$.*

Neste caso, sempre há a solução nula $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$. Resta ver se tem somente a solução nula (sistema homogêneo determinado) ou se existem outras soluções (sistema homogêneo indeterminado). Matricialmente, a última coluna da matriz ampliada sendo nula, as operações elementares sobre linhas não modificam essa situação, e por isso, muitas vezes, esta coluna é omitida por economia.

Uma relação interessante entre um sistema não homogêneo $AX = B$ e o sistema homogêneo associado $AX = 0$ é que *se X_0 é uma solução particular do sistema não homogêneo, isto é, $AX_0 = B$, as outras soluções podem ser escritas na forma $X = X_0 + X_1$, em que X_1 é uma solução do sistema homogêneo.*

No exemplo (anteriormente estudado) $(*) \begin{cases} x + y + 4z = 15 \\ \quad\ \ 3y + 2z = 9 \end{cases}$,

o sistema homogêneo associado é $(\star) \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ \quad\ \ 3y + 2z = 0 \end{cases}$.

Vimos que as soluções de (*) são da forma

$$(x, y, z) = (12, 3, 0) + t(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, 1), t \in \mathbb{R}.$$

Observe que $(12, 3, 0)$ é uma solução particular do sistema (*) e que

$$(x, y, z) = t(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, 1),\ t \in \mathbb{R},$$

são as soluções do sistema homogêneo (☆). Na verdade, nas soluções de (*), em vez da solução particular $(12, 3, 0)$, poderia ser qualquer outra solução particular de (*).

Geometricamente, o sistema não homogêneo tem como solução a reta que passa pelo ponto $(12, 3, 0)$ e tem a direção da reta (isto é, é paralela à reta) dada como solução de sua homogênea associada, que representa uma reta pela origem. Veremos mais tarde que $(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$ representa o "vetor direção" da reta.

No outro exemplo, cuja matriz ampliada já é dada por

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 0 & 3 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz ampliada do sistema homogêneo associado fica

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo as variáveis x, y, z e w no sistema homogêneo $AX = 0$ acima, em que as variáveis livres são y e w, utilizando $(y, w) = (1, 0)$, obtemos $(x, y, z, w) = (-20, 1, 0, 0)$, e utilizando $(y, w) = (0, 1)$, obtemos $(x, y, z, w) = (-3, 0, -1, 1)$; e as soluções do sistema linear homogêneo podem ser escritas na forma

$$t(-20, 1, 0, 0) + s(-3, 0, -1, 0), \text{ com } t, s \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, uma solução geral de um sistema linear $AX = B$ é soma de uma solução particular do sistema, com uma solução do sistema homogêneo $AX = 0$:

$$(x, y, z, w) = (-3, 0, -1, 1) + t(-20, 1, 0, 0) + s(-3, 0, -1, 0), \text{ com } t, s \in \mathbb{R}.$$

Exercícios 1.4

1. *Para cada sistema abaixo:*

   - *Escreva o sistema na forma matricial $AX = B$, identificando A, X e B. Obtenha a matriz ampliada $\widetilde{A} = [A|B]$.*
   - *Escalone a matriz ampliada pelo Método da Eliminação de Gauss.*

- *Obtenha os postos das matrizes A e $\widetilde{A}$ (p e q) e faça uma análise completa do sistema com o Teorema de Rouché-Capelli.*
- *Quando possível, resolva o sistema, prosseguindo com a matriz ampliada até obter a l-reduzida (Método de Gauss-Jordan). No caso de sistemas indeterminados, escreva as respostas no formato $(x_1, \ldots, x_n) = (b_1, \ldots, b_n) + \lambda_1(a_{11}, \ldots, a_{1n}) + \cdots + \lambda_r(a_{r1}, \ldots, a_{rn})$, em que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são parâmetros.*
- *Quando impossível, resolva o sistema linear homogêneo associado.*

$$(a)\begin{cases} x_1 \qquad +2x_3 \quad +3x_4 \qquad = 0 \\ \quad +x_2 \quad +x_3 \quad -2x_4 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +x_5 \quad = 0 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} 3x \quad +5y \qquad = 1 \\ \quad 2y \quad +z \quad = 3 \\ \qquad\quad -z \quad = 1 \end{cases}$$

Nos itens abaixo, considere o problema em três variáveis, x, y, z:

(c) $2x - 3y + 4z = 1$ *(d)* $x + 2y = 0$ *(e)* $y = 0$ *(f)* $\begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

2. *Resolva os sistemas reduzindo à forma escalonada reduzida por linhas e confira os resultados com o Teorema de Rouché-Capelli. Faça o escalonamento passo a passo.*

$$(a)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = -1 \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases} \qquad (e)\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Resposta: (a) $\left(\frac{29}{15}, 0, \frac{14}{15}, \frac{17}{5}, 0\right) + \lambda_1(-3, 1, 0, 0, 0) + \lambda_2\left(\frac{-8}{15}, 0, \frac{7}{15}, \frac{11}{5}, 1\right)$, (b) $(1, -1, 2, -2)$,
(c) $\left(\frac{17}{3}, \frac{-5}{3}, 0\right) + \lambda_1\left(\frac{-7}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$, (d) $\left(\frac{7}{16}, \frac{-1}{16}, \frac{17}{8}\right)$, (e) $(0, 0)$.

3. *Dado o sistema*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1)$ é solução.
(b) Agora resolva efetivamente o sistema.
(c) Resolva também o sistema homogêneo associado.
(d) Verifique que toda solução obtida em (b) é soma de uma solução encontrada em (c) com a solução de (a).

4. *Para que valores de α, o sistema* $\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ x + (2\alpha+1)y = 0 \end{cases}$ *tem*

(a) uma única solução? *(b) infinitas soluções?* *(c) nenhuma solução?*

RESPOSTA: Infinitas soluções se α for 1 ou -2, solução única caso contrário.

5. *Construa exemplos de sistemas com três variáveis x, y e z a m equações, com posto da matriz dos coeficientes p para cada caso a seguir. Se não existir, justifique.*

(a) $m = 1$ e impossível.
(b) $m = 2$ e grau de liberdade 2.
(c) $m = 2$ e grau de liberdade 1.
(d) $m = 2$ e impossível.
(e) $m = 2$ e determinado.
(f) $m = 3$ e grau de liberdade 2.
(g) $m = 3$ e grau de liberdade 1.
(h) $m = 3$ e solução única.
(i) $m = 3$, impossível e $p = 1$.
(j) $m = 4$ e grau de liberdade 3.
(k) $m = 3$, impossível, $p = 2$, duas das equações formando sistema sem solução.
(l) $m = 3$, impossível e dois a dois com infinitas soluções.

1.5 Inversão de matrizes por escalonamento e matrizes elementares

Uma outra aplicação do processo de Gauss-Jordan é na inversão de matrizes.

Dada uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, considere a matriz $M = [A \mid I_n]$ obtida justapondo A com a matriz identidade I_n. Aplicando o processo de Gauss-Jordan em M, se a matriz A for invertível, deve-se chegar na matriz escalonada l-reduzida $R = [I_n \mid A^{-1}]$.

Isto significa também que a matriz invertível A se reduz à ***matriz identidade*** na sua forma l-reduzida, o que fornece o posto máximo n e que o determinante de A é não nulo.

Além disso, as mesmas operações que levam A em I_n levam I_n em A^{-1}. Observe que se a matriz não é invertível, a matriz na forma escalonada l-reduzida R não terá I_n na primeira parte.

EXEMPLO: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Temos que

$$M = [A \mid I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim}$$

$$\overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = R = [I_2 \mid A^{-1}]$$

e, portanto, a inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

No Octave, é imediato implementar o método utilizando a função "`rref`" que efetua diretamente o processo de Gauss-Jordan. Veja atividade 7.2.6 da página 339.

Podemos demonstrar a validade desse processo de inversão de matrizes utilizando as chamadas ***matrizes elementares***, obtidas da matriz identidade por uma operação elementar sobre linhas.

A cada operação elementar em M corresponde uma multiplicação $E \cdot M$ de M por uma matriz elementar E, em que E é obtida de uma matriz identidade pela operação elementar em questão.

Por exemplo, a matriz $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar obtida de I_3 pela operação $L_1 \longleftrightarrow L_3$, e podemos ver que multiplicando uma matriz M à esquerda por E temos

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{E} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}}^{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Confira o resultado da operação elementar aplicada diretamente em M:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, a matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar obtida de I_3 pela operação $L_3 \to L_3 + 5L_1$, e multiplicar uma matriz M à esquerda por E

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ -5 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 11 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

é equivalente a aplicar a operação na matriz M:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ -5 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 11 & 22 & 15 \end{bmatrix}.$$

Do mesmo modo, a matriz elementar $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ obtida da identidade I_3 multiplicando a linha 3 por x produz numa multiplicação $E \cdot M$ o mesmo resultado que multiplicar a linha 3 de M por x.

Assim, dada uma matriz quadrada invertível A, temos uma sequência de matrizes elementares $E_1, E_2, \dots, E_r$ correspondentes às operações elementares efetuadas a partir de $M = [A \mid I_n]$ para se chegar na sua matriz escalonada l-reduzida $R = [I_n \mid B]$, tal que $R = E_r \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot [A \mid I_n]$. Mostremos que $B = A^{-1}$.

Primeiro, um fato da multiplicação de matrizes: pode-se provar que, se escrevemos uma matriz M na forma $M = [M^1 \mid M^2 \mid \cdots \mid M^m]$ (estamos colocando "|" para separar blocos de matrizes, como no caso $M = [A \mid I_n]$), então, multiplicando M à esquerda por U temos:

$$U * M = [U * M^1 \mid U * M^2 \mid \cdots \mid U * M^m].$$

Assim, temos que $R = [I_n \mid B] = [E_r \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A \mid E_r \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot I_n]$. Das primeiras n colunas, conclui-se que $E_r \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$, donde $E_r \cdots E_2 \cdot E_1 = A^{-1}$. Pelas n últimas colunas, segue que $E_r \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot I_n = B$. Logo, $B = A^{-1}$. $\Diamond$

Veja a inversão da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ com o Octave, mostrando todos os passos do escalonamento por Gauss-Jordan na atividade 7.2.7, página 339. Aproveitamos também para obter e utilizar as matrizes elementares para ilustrar a justificativa do método de inversão e a atuação das matrizes elementares.

O mesmo exemplo, resolvido manualmente:

▶ PASSO 1. Trocando linha 1 com linha 2, em $M = [A|I_3]$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_1$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▶ PASSO 2. Transformando o primeiro pivô em 1, ao multiplicar a linha 1 por $\frac{1}{3}$:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_2$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▶ PASSO 3. Zerando os elementos não nulos abaixo do primeiro pivô. No caso, com a operação $L_3 \to L_3 + L_1$:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = M_3$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▶ PASSO 4. O segundo pivô já sendo 1, vamos zerar os outros elementos da coluna 2, com $L_1 \to L_1 - \frac{4}{3}L_2$ e $L_3 \to L_3 - \frac{10}{3}L_2$:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = M_4$$

$$\cdots \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = M_5$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

▶ PASSO 5. Transformar o terceiro pivô em 1 e anular os outros elementos da coluna, com $L_3 \to -\frac{1}{4}L_4$, $L_1 \to L_1 + L_3$ e $L_2 \to L_2 - 2L_3$:

$$M_5 \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \overset{\ell}{\sim} \cdots \text{(exercício)}$$

$$\cdots \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = R = [\, I_3 \,|\, A^{-1} \,]$$

Qual é a matriz U tal que $R = U \cdot M_5$?

✍ Exercícios 1.5

1. *Considere* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$

   (a) Encontre A^{-1} usando escalonamento.
   (b) Para cada operação elementar e_i efetuada, obtenha a matriz elementar E_i correspondente. Qual o resultado de ir multiplicando à esquerda por essas matrizes elementares, a partir de A (isto é, $E_r E_{r-1} \ldots E_1 A = ?$) e a partir de I?
   (c) Para cada matriz elementar obtida, calcule o determinante.
   (d) Verifique que o determinante é:
   1 *para a matriz elementar da operação $L_i \to L_i + \lambda L_k$;*
   -1 *para a matriz elementar da troca de linhas $L_i \leftrightarrow L_j$; e*
   λ *para a matriz elementar da multiplicação de linha por λ, $L_i \to \lambda \cdot L_i$.*
   (e) Obtenha, a partir das informações acima, um método para cálculo de determinante.

2. *Invente matrizes quadradas e aplique o método da inversão por escalonamento. O que ocorre quando não obtemos na matriz l-reduzida a matriz identidade na primeira metade?* RESPOSTA: A não é invertível.

3. *Calcule o determinante de* $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

   (a) usando desenvolvimento de Laplace pela segunda coluna (por que pela segunda coluna?).
   (b) por escalonamento.

   Inverta M (se possível) pelo escalonamento.

OBSERVAÇÃO 1: O método do cálculo do determinante de uma matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq n}$ pelo ***desenvolvimento de Laplace*** é o seguinte:

- Primeiro, escolhe-se uma linha i_0 [ou uma coluna j_0] de A.
- Então
$$\det(A) = \sum_{j=1\ldots n} a_{i_0 j} A_{i_0 j}$$
$$\left[\text{ou } \det(A) = \sum_{i=1\ldots n} a_{i j_0} A_{i j_0}\right],$$
em que $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{(i,j)})$ é conhecido como ***cofator*** de a_{ij}, sendo que $A^{(i,j)}$ é a submatriz obtida de A ao eliminar a linha i e a coluna j.

Observe que se escolhermos a linha ou coluna com mais elementos nulos, menos contas temos a fazer!

OBSERVAÇÃO 2: Outra forma de se calcular determinantes, somente para o caso de matrizes 3×3, é a ***regra de Sarrus***, muito utilizada pelos alunos.

O problema é sua utilização indevida para matrizes maiores. Não vale generalizar!

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Apresentamos aqui mais algumas respostas aos exercícios propostos ao longo do texto. Lembre-se que não basta que as respostas coincidam para que o exercício esteja certo. É necessário que o desenvolvimento da resolução esteja correto, e dentro da proposta do exercício.

Do capítulo 1

▶ Exercícios 1.1, página 19.

1. $$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}}^{B}, \quad \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -2 & -9 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. $$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}^{B}, \quad \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. $$\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ t \end{bmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{B}, \quad \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

▶ Exercícios 1.2.1, página 26.

1. $A \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$D \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$G \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $H \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Pelo menos cinquenta linhas nulas.

▶ Exercícios 1.2.2, página 30.

1. $A \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 6/5 \end{bmatrix}$, $B \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$D \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$G \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H \overset{\ell}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, Não.

▶ Exercícios 1.3, página 31.

1. posto(E)=1, e os outros, 2.

3. Se a matriz é invertível, ela tem determinante não nulo, logo o posto é a ordem da matriz.

▶ Exercícios 1.4, página 38.

1. (a) $\lambda_1(-2,-1,1,0,0)+\lambda_2(-3,2,0,1,0)$; (b) $(-3,2,-1)$;
(c) $(\frac{1}{2},0,0)+\lambda_1(\frac{3}{2},1,0)+\lambda_2(-2,0,1)$; (d) $\lambda_1(-2,1,0)+\lambda_2(0,0,1)$;
(e) $\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,0,1)$; (f) $(1,0,3)+\lambda(0,1,0)$.

3. Soluções: $(1,1,1,1)+t(1,0,0,1)$, $t \in \mathbb{R}$.

5. (e) O sistema determinado não existe, pois $q \leq 2 = m < 3 = n$, não podendo ocorrer $p = q = n$ do Teorema de Rouché-Capelli.

▶ Exercícios 1.5, página 45.

1. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{12} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{12} & \frac{31}{12} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} \end{bmatrix}$.

(d) Para calcular o determinante de uma matriz A, aplique o processo de eliminação de Gauss, anotando as trocas de linha (ℓ = número de trocas de linhas) e as multiplicações de linhas (armazenar os multiplicadores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$). Então, se E é a matriz escalonada, temos que $\det(A) = (-1)^{\ell}\dfrac{1}{\lambda_1 * \cdots * \lambda_k}\det(E)$. Lembramos que $\det(E)$ é o produto dos elementos da diagonal de E.

3. (a) $\det(M) = (-1)^{3+2}\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} = -7$. A segunda coluna possui mais zeros, diminuindo as contas.

(b) $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{13}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{bmatrix}$.